20 KASIM 2019

DOĞU AKDENİZ ÜNİVERİSTESİ
BİLGİSAYAR MÜHENDİSLİĞİ BÖLÜMÜ
BLGM371 ALGORİTMLARIN ÇÖZÜMLENMESİ
BİRİNCİ VİZE SINAVI

ADI VE SOYADI: Adnan, Acan **ÖĞRENCİ NO:** Çözümler
SÜRE: 100 DAKİKA

S.1. Aşağıda verilen özyinelemeli (rekürsif) denklemlerin doğru olup olmadıklarını asimptotik notasyonların tanımlarını kullanarak gösteriniz.

1.i. $100n^3 + 3n^2 = \Omega(n^4)$ **ii.** $n^2.\lg n = O(n^{2.5})$ **iii.** n + n.lg n = o(n^2.lg n)

S.2. Aşağıda verilen algoritmanın çalışma zamanı karmaşıklığını (T(n)) çözümleyiniz.

Algoritma XY(n)

```
Toplam=0                                  ——— 1
For i= 1 to n                             ——— n+1
   For j=i+1 to n                         ——— (n-1)+(n-2)+...+1 = Σ_{i=1}^{n-1} i = (n-1)n/2
      For k= 1 to  n                      ——— (n+1) * (n-2)(n-1)/2
              Toplam=Toplam+i*j*k         ——— n . (n-2)(n-1)/2
Return Toplam
```

$(n-1)+(n-2)+\dots+1 = \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{(n-1)n}{2}$

$(n+1) * \frac{(n-2)(n-1)}{2}$

$n \cdot \frac{(n-2)(n-1)}{2}$

24

S.3. i. $T(n)=T(n/2) + 2^n$ Yerine koyma metodu ile $O(2^n)$ olduğunu gösteriniz
ii. $T(n)=2T(n-2)+2$ Yerine koyma yöntemiyle $T(n)= \Theta(2^n)$ olup olmadığını test ediniz.

S.4. i. $T(n)=4$ Eğer n=1
$T(n)=2T(n/2)+4n$ Aksi halde

Iterasyon yöntemiyle çözünüz.

ii. $T8n)=3T(n/3)+n^3$ Iterasyon yöntemiyle çözünüz.

S.5. i. $T(n)=2T(\sqrt{n}) + \lg n$ Master metodu ile çözünüz
ii. $T(n)=4T(n/16)+n^{0.3}$ Master metodu ile çözünüz
iii. $T(n)=(4/3)*T(n/2) + \lg n$ Master metodu ile çözünüz (lg (4/3) = 0.415)

S.1. i) $100n^3 + 3n^2 \overset{?}{=} \Omega(10^4)$

$\exists c > 0, n_0 > 0 : \; \underline{c \cdot 10^4} \leq 100n^3 + 3n^2 \;, \; \forall n \geq n_0$

4

$c \cdot 10^4 \leq 100n^3 + 3n^2$

$c \leq \underbrace{\frac{100}{n} + \frac{3}{n^2}}_{k(n)} \;, \quad \lim_{n \to \infty} k(n) = 0$

Herhangi bir sabit $c>0$ için, $\exists n(c)$ öyleki $k(n(c)) < c$. Dolayısıyla sabit bir $c>0$ bulunmayacağından bu asimptotik denklem doğru değildir.

ii) $n^2 . \lg n \overset{?}{=} O(n^{2.5})$

4 $\exists c > 0, n_0 > 0 : \; n^2 \lg n \leq c . n^{2.5} \;, \; \forall n \geq n_0$

$c . n^{2.5} \geq n^2 \lg n$

$c \geq \underbrace{\lg n / n^{0.5}}_{k(n)} \qquad \lim_{n \to \infty} \lg n / n^{0.5} = 0$

n	$k(n)$
1	0
2	$1/\sqrt{2}$
4	$2/2 = 1$
16	$4/4 = 1$
64	$6/8$
256	$8/16$

$\Rightarrow c = 1, \; n_0 = 64$ ✓

iii. $n + n\lg n \stackrel{?}{=} o(n^2 . \lg n)$

8

$\forall c>0, \exists n_0(c) > 0 ! \quad c . n^2 \lg n > n + n \lg n, \quad \forall n \geq n_0$

$$c . n^2 . \lg n > n + n . \lg n$$

$$c > \underbrace{\frac{1}{n . \lg n} + \frac{1}{n}}_{k(n)} \Rightarrow c > \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{\lg n}\right)$$

$\lim_{n \to \infty} k(n) = 0.$

Herhangi bir $c>0$ için, öyle büyük bir $n_0(c)$ vardır ki $\frac{1}{n_0(c) . \lg(n_0(c))} + \frac{1}{n_0(c)} < c$ olur. ✓

~

S. 2. $T(n) = 1 + (n+1) + \frac{(n-1)n}{2} + (n+1)\frac{(n-2)(n-1)}{2} + \frac{n(n-2)(n-1)}{2}$

$$= \Theta(n^3)$$

~

S. 3. i) $T(n) = T(n/2) + 2^n$, önerilen çözüm $O(2^n)$.

12

$$T(n) = T(n/2) + 2^n$$
$$\leq c . 2^{n/2} + 2^n$$
$$\leq c . \frac{2^n}{2} + 2^n$$
$$\leq c . 2^n - \frac{c}{2} 2^n + 2^n$$
$$\leq c . 2^n - \underbrace{\left(\frac{c}{2} - 1\right) 2^n}$$
$$\leq c . 2^n \quad \text{eğer } \left(\frac{c}{2} - 1\right) 2^n \geq 0$$
$$\Rightarrow \frac{c}{2} - 1 \geq 0$$
$$\Rightarrow c \geq 2 \checkmark$$

ii) $T(n) = 2T(n-2)+2$, önerilen çözüm $\Theta(2^n)$

12

$$\underbrace{c_1 2^n \le T(n)}_{1} \le c_2 2^n, \quad \exists c_1, c_2, n_0 > 0, \ \forall n \ge n_0.$$

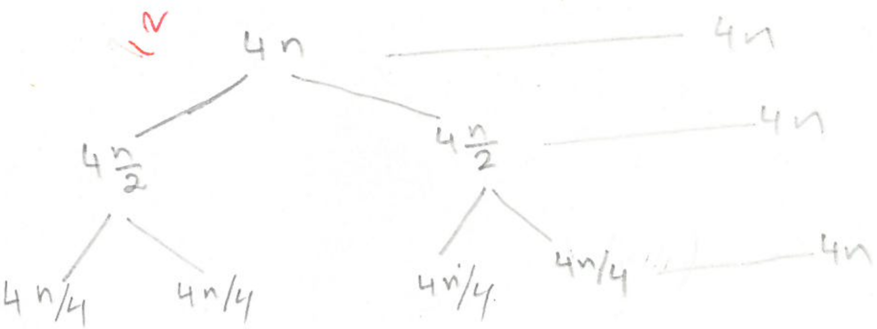
$$T(n) \le c_2 2^n \quad (2)$$

(1)

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 2T(n-2)+2 \\
&\ge 2\left[c_1 \cdot 2^{n-2}\right]+2 \\
&\ge \tfrac{1}{2} c_1 2^n + 2 \\
&\ge c_1 \cdot 2^n - \tfrac{1}{2} c_1 2^n + 2 \\
&\ge c_1 2^n + \underbrace{\left(2 - \tfrac{1}{2} c_1 2^n\right)}_{\ge 0}
\end{aligned}
$$

≥ 0, büyük n değerleri için olamayacağından böyle bir c_1 değeri yoktur. Dolayısıyla önerilen çözüm uygun değildir.

S.4. i) $T(n) = \begin{cases} 4, & n=1 \\ 2T(n/2)+4n \end{cases}$



Giriş büyüklüğü $= \frac{n}{2^i}$, $i = \lg n$

$$T(n) = \sum_{i=0}^{\lg n} 4n = 4n(\lg n + 1) = 4n \lg n + 4n$$

$$\Rightarrow T(n) = \Theta(n . \lg n)$$

$T(n) = 2$ eğer $n=2$

$= 8$ eğer $n=4$

Dolayısıyla yukarıdaki tanımı, eğer $n=2$ ise $T(n)=2$ olarak değiştiriyoruz.

ii) $T(n) = 3T(n/3) + n^3$

12

$$= n^3 + 3\left[\left(\frac{n}{3}\right)^3 + 3T(n/9)\right]$$

$$= n^3 + \frac{n^3}{9} + 9T(n/9)$$

$$= n^3 + \frac{n^3}{9} + 9\left[\left(\frac{n}{9}\right)^3 + 3T(n/27)\right]$$

$$= n^3 + \frac{n^3}{9} + \frac{n^3}{81} + 27T(n/27)$$

Giriş büyüklüğü $= \frac{n}{3^i} \Rightarrow i = \log_3 n$

$$T(n) = \sum_{i=0}^{\log_3 n} \frac{n^3}{9^i}$$

$$= n^3 \cdot \sum_{i=0}^{\log_3 n} \left(\frac{1}{9}\right)^i = n^3 \left[\frac{1 - \left(\frac{1}{9}\right)^{\log_3 n + 1}}{1 - \frac{1}{9}}\right]$$

$$= n^3 \left[\frac{9}{8} - \frac{9}{8} \cdot \left(\frac{1}{9}\right) \cdot \frac{1}{9^{\log_3 n}}\right]$$

$$9^{\log_3 n} = (3^2)^{\log_3 n} = n^2$$

$$\Rightarrow T(n) = \frac{8}{9} n^3 - \frac{1}{8} \cdot \frac{n^3}{n^2}$$

$$= \Theta(n^3)$$

S.5 i) $T(n) = T(\sqrt{n}) + \lg n$, $m = \lg n$, $n = 2^m$, $\sqrt{n} = 2^{m/2}$

8

$$T(2^m) = T(2^{m/2}) + m \ , \quad S(m) \triangleq T(2^m)$$

$$S(m) = S(m/2) + m \rightarrow S(m) = \Theta(m \cdot \lg m) \, [\text{merge-sort}]$$

$$\Rightarrow T(2^m) = \Theta(m \cdot \lg m)$$

$$T(n) = \Theta(\lg n \cdot \lg \lg n)$$

~

ii) $T(n) = 4T(n/16) + n^{0.3}$

8

$$n^{\log_{16} 4} = n^{0.5} \Rightarrow n^{0.3} = O(n^{0.5-\varepsilon}) \ , \quad 0 < \varepsilon < 0.2$$

Birinci kural uygulanır ve

$$T(n) = \Theta(n^{0.5}) \text{ olur.}$$

~

iii) $T(n) = \frac{4}{3} \cdot T(n/2) + \lg n$

5

$$n^{\log_b a} = n^{\lg(4/3)} = n^{0.415}$$

$$\lg n = O(n^{0.415-\varepsilon}) \ , \quad 0 < \varepsilon < 0.4$$

Birinci kural uygulanır

$$T(n) = \Theta(n^{0.415})$$