BLGM321: BİLGİSAYAR MÜHENDİSLERİ İÇİN SİNYALLER VE SİSTEMLER

Bölüm 2:
Temel Sinyal Fonksiyonları ve İşlenmeleri

Temel olarak kullanılan sinyaller:

1. Birim adım sinyali
2. Birim dürtü sinyali
3. Kare dalga sinyali
4. Sinüzoidal sinyal
5. Üstsel azalan sinyal
6. Karmaşık sinüs sinyali

- Sinyaller bilgi içeren fiziksel niceliklerdir. Bu fiziksel niceliklerin yazınsal olarak ifadeleri için sinyalleri matematiksel fonksiyonlarla ifade ederiz.

Sürekli Zamanlı Sinyaller

- Bu sinyallerde zamanın her anı için sinyalin bir değeri vardır.

- Sinyal belli bir zaman süresince kesintisizdir.

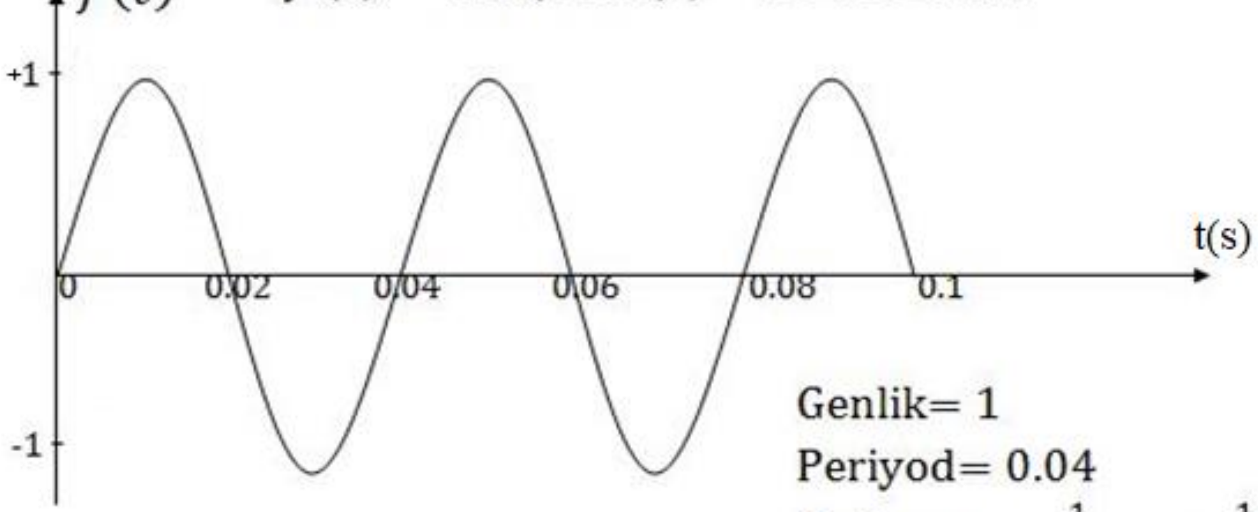
- Sürekli zamanlı sinyallere en basit örnek sinüs siynali verilebilir.

- Bazı sinyallerin grafiklerinde belli yerlerde altamalar olmaktadır. Yani sinyalin t_i^- ile t_i^+ anındaki değerler farklı olabilir. Bu tür sinyallere parçalı sürekli zamanlı sinyaller denilir.

Örnek: Kare dalga sinyali

Örnek: sürekli sinüs dalgası

$$f(t) = \sin(50\pi t), \quad 0 \le t \le 0.1$$



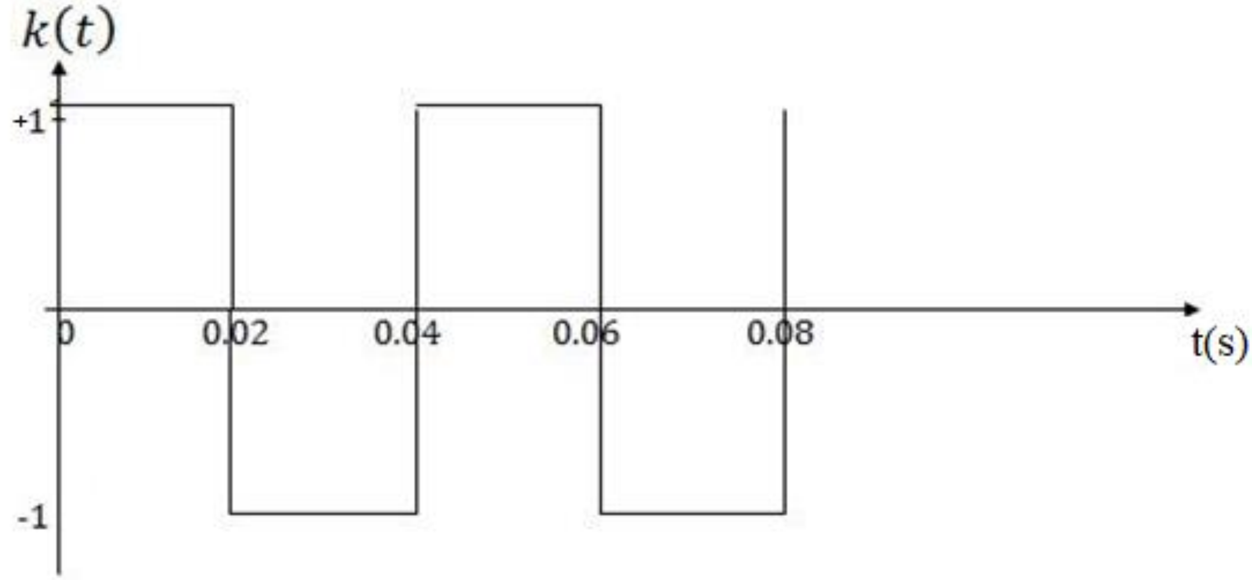
Genlik= 1

Periyod= 0.04

Frekans= $\frac{1}{periyod} = \frac{1}{0.04} = 25Hz$

Örnek: Parçalı sürekli zamanlı kare dalgası

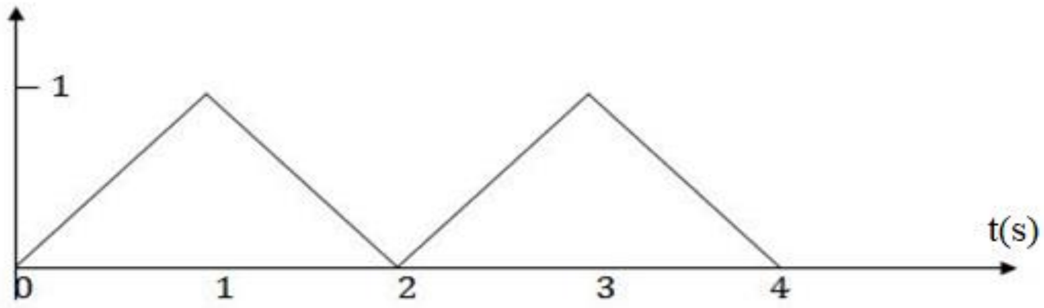
$$k(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 0.02 \\ -1, & 0.02 \le t < 0.04 \end{cases}$$



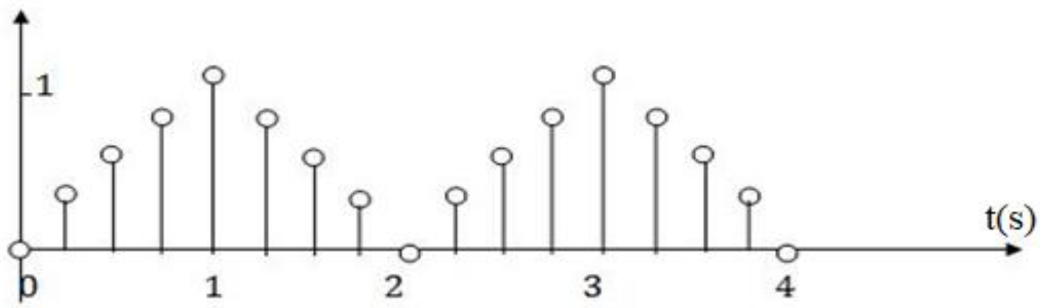
Ayrık Zamanlı Sinyaller

- Ayrık zamanlı sinyaller zamanın belli anlarında değerler alırlar.
- Ardı ardına gelen iki zaman anının arasındaki aralıkta herhangi bir değer almazlar.
- Ayrık zamanlı sinyaller sürekli zamanlı sinyallerden “örnekleme ” vasıtasıyla elde edilirler.

Örnek: sürekli zaman üçgen sinyali

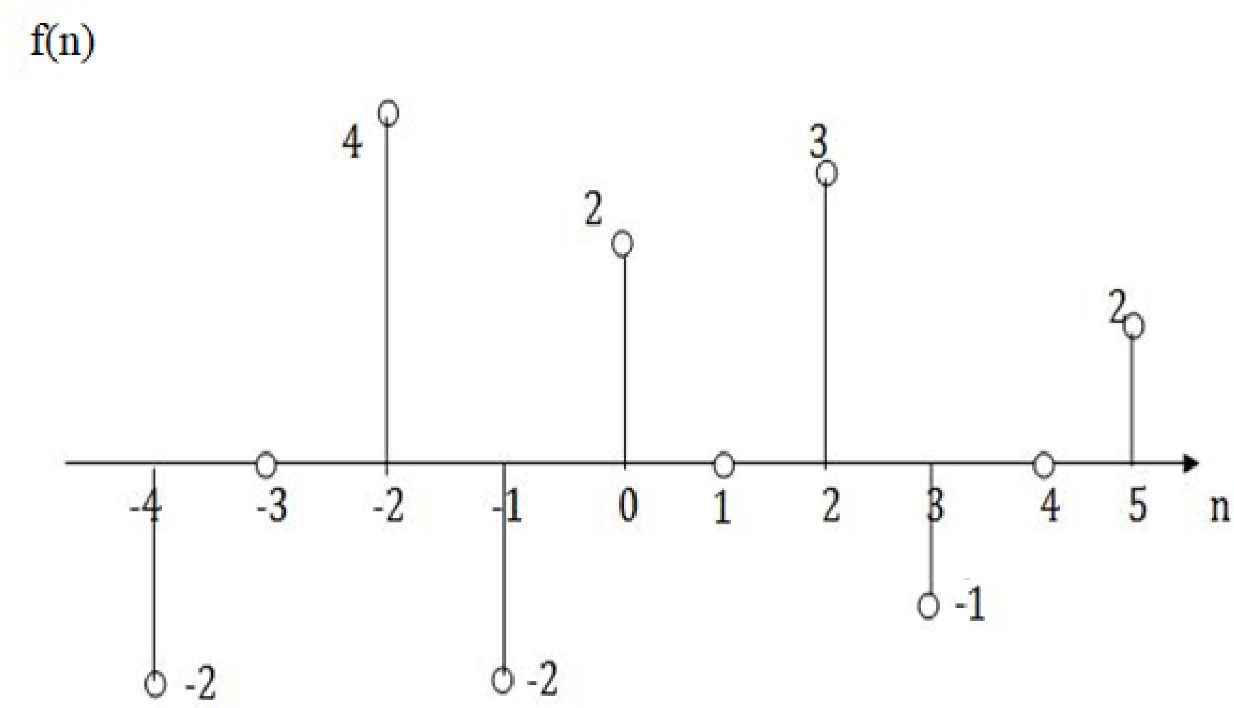


Ayrık zaman üçgen sinyali



Ayrık zamanlı sinyaller grafiksel olarak gösterildiği gibi matematiksel olarak da göserilebilirler.

<u>Örnek:</u> Aşağıda grafiği verilen ayrık zamanlı sinyali matematik dizini şeklinde yazınız.



⟹ $$f(n) = [-2, 0, 4, -2, 2, 0, 3, -1, 0, 2]$$

n: ayrık zaman indeksi

Sinyallerin İşlenmesi
Sürekli Zamanlı Sinyallerin İşlenmesi:

- Grafiği verilen bir sinyalin zaman ekseninde kaydırılması ve genliğinin değiştirilmesi ya da zaman eksenine göre simetriğinin alınması ile yeni sinyaller elde edilir. Bu işlemler matematiksel olarak şöyle açıklanabilir.

Örnek: f(t) sürekli zamanlı bir sinyal olsun ve bu sinyalin grafiği verilmiş olsun, buna göre:

1. f(t - a) fonksiyonunun grafiği f(t) fonksiyonunun grafiğinin zaman ekseninin sağa ($a>0$) ya da zaman ekseninde sola ($a<0$) , |a| birim kadar kaydırılması ile elde edilir.

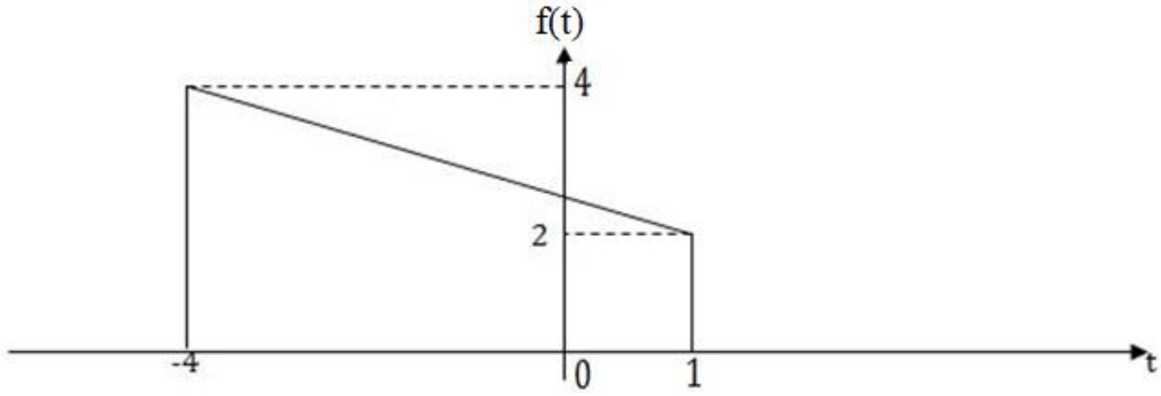
2. f(bt) fonksiyonunun grafiği f(t) fonksiyonunun grafiğinin zaman ekseninin b'ye bölünmesi ile elde edilir.

3. cf(t) fonksiyonunun grafiği f(t) fonksiyonunun grafiğinin c ile çarpılması ile elde edilir.

4. cf(bt-a) fonksiyonunun grafiğini çizmek için ilk olarak f(t-a) fonksiyonunun grafiği çizilir. Daha sonra f(t-a) grafiğinin zaman ekseni b'ye

bölünür ve elde edilen sinyalin genliği c ile çarpılır.

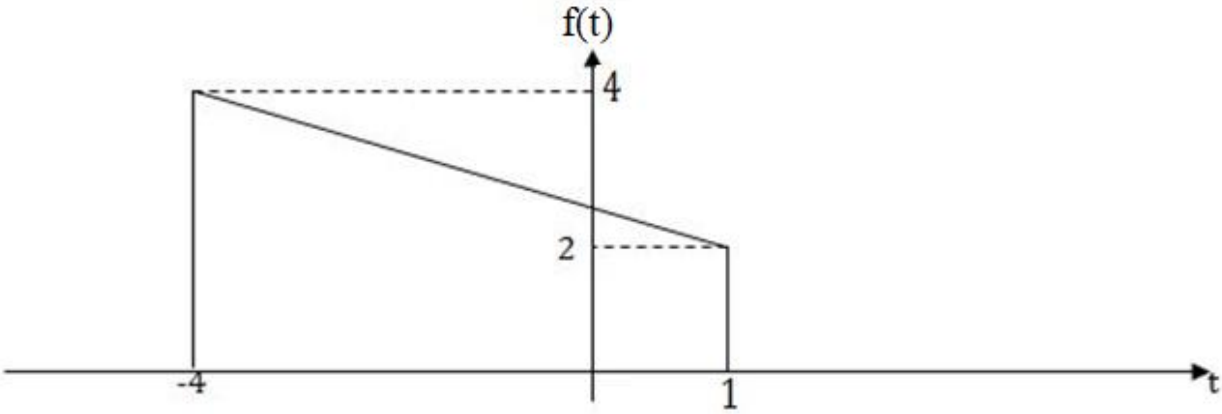
<u>**Örnek:**</u> Aşağıda grafiği verilen f(t) fonksiyonunun işlenmesi ile elde edilen g(t)= -2f(2t+3) fonksiyonunun grafiğini çiziniz.



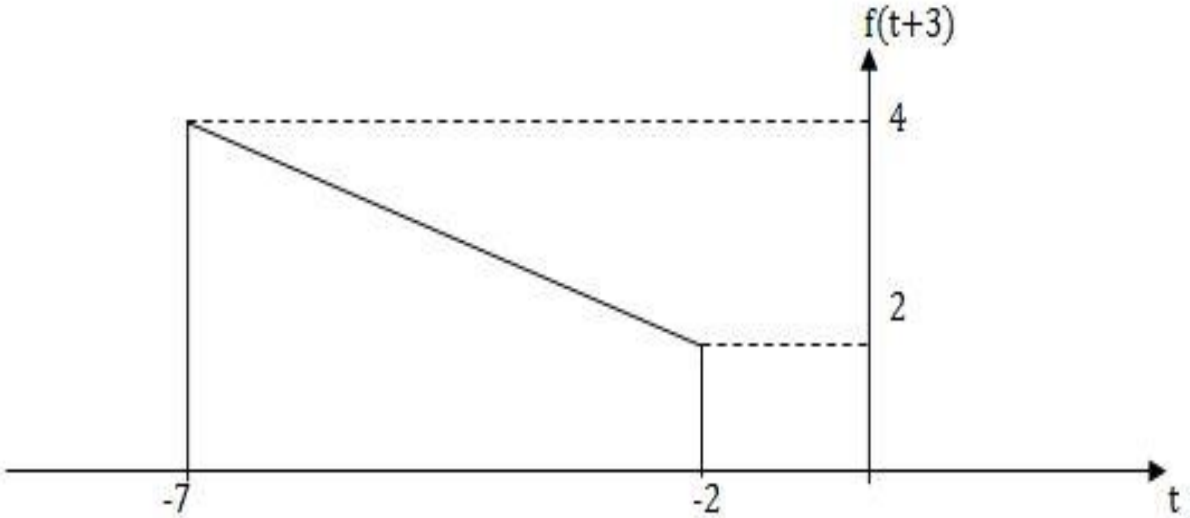
<u>**Çözüm:**</u> g(t)= -2(2t+3) fonksiyonunun grafiğini çizmek için:

a) f(t+3) fonksiyonunun grafiği çizilir.
b) f(2t+3) fonksiyonunun grafiği çizilir.
c) -2f(2t+3) fonksiyonunun grafiği çizilir.

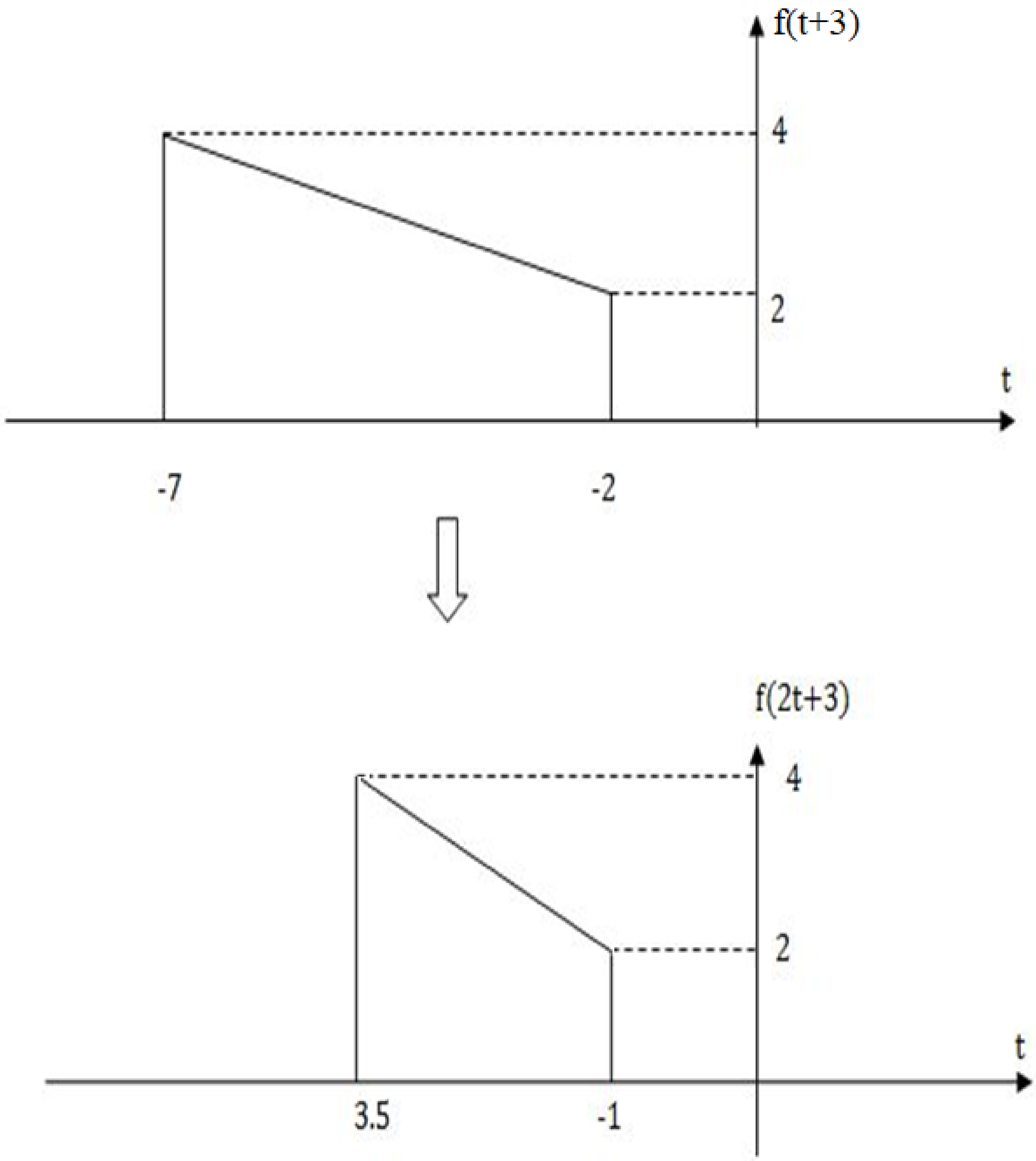
- f(t+3) fonksiyonunun grafiğini f(t) fonksiyonunun sola doğru zaman ekseninde 3 birim kaydırılması elde edilir.



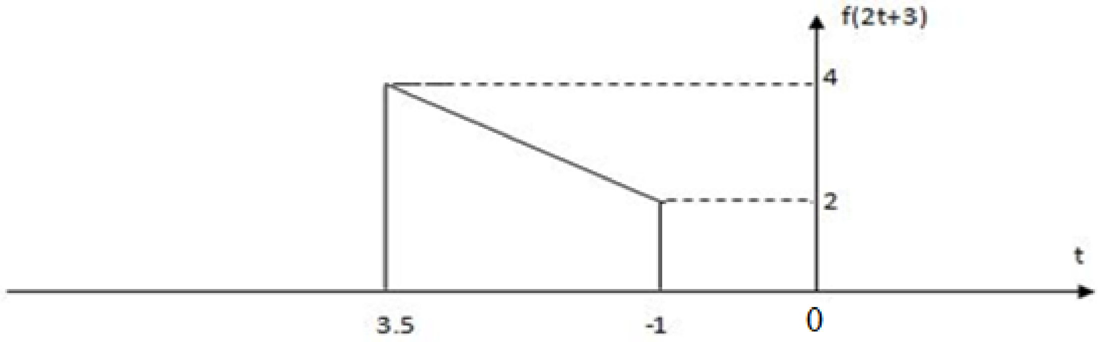
$$\Downarrow$$



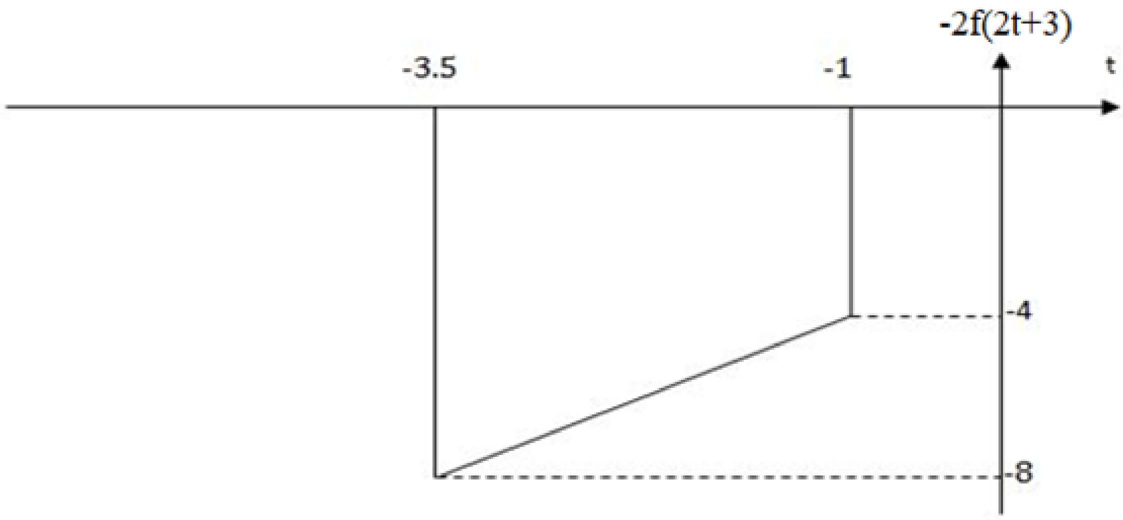
- f(2t+3) fonksiyonunun grafiği f(t+3) fonsiyonunun grafiğinin zaman ekseninin 2'ye bölünmesi ile elde edilir.



- -2f(2t+3) fonksiyonunun grafiği f(2t+3) fonksiyonunun grafiğinde bulunan genliklerin -2 ile çarpılmasıyla elde edildir.



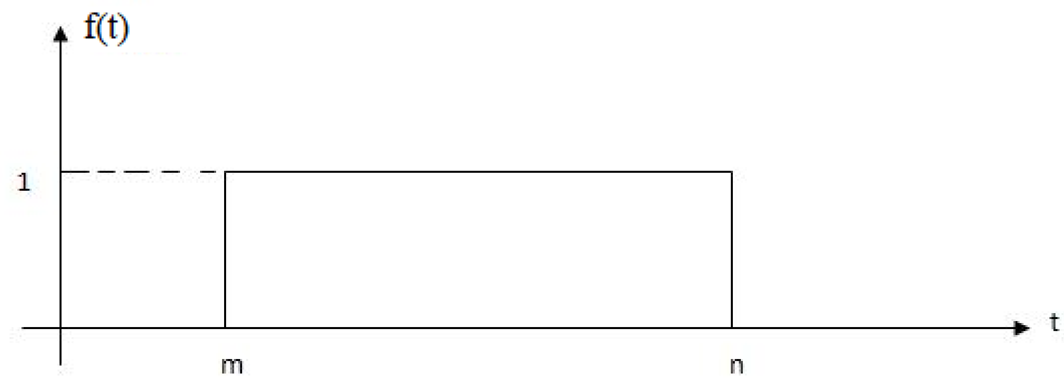
⇩



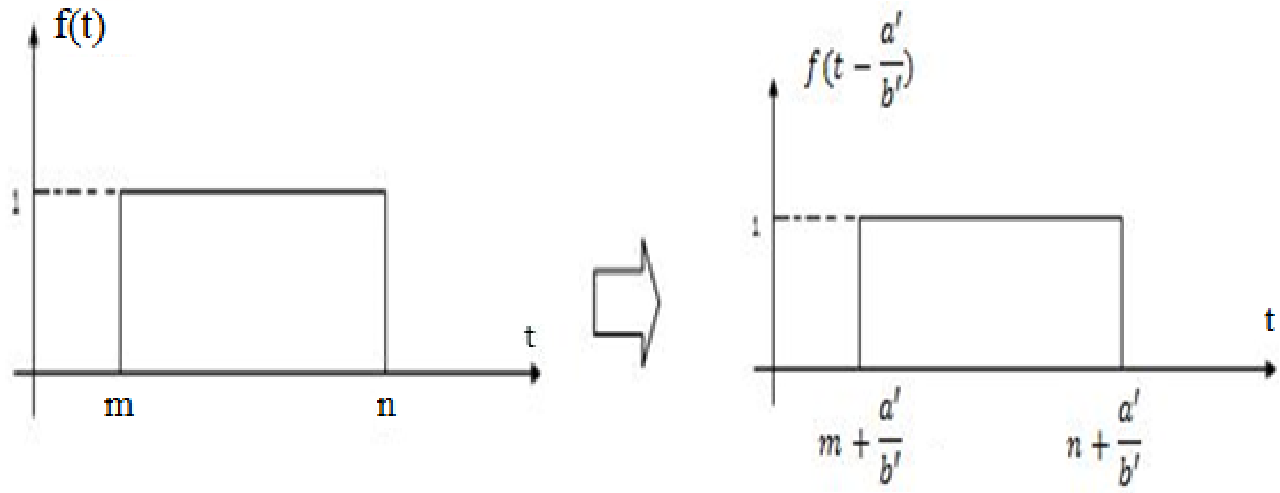
- $c'f(\frac{1}{b'}t - \frac{a'}{b'})$ sinyalinin grafiğini çizmek için f(t) sinyalinin grafiğinin zaman ekseni önce b' ile çarpılır ($\frac{t}{b'}$ olduğu için). Daha sonra da $\frac{a'}{b'}$ kadar sağa ($\frac{a'}{b'}$>0 ise) veya $\frac{a'}{b'}$ kadar sola ($\frac{a'}{b'}$<0 ise) kaydırılır. Son olarak genlik c' ile çarpılır.

Örnek: Aşağıdaki grafiği verilen f(t) sinyalinden elde edilen $c'f(\frac{d't-a'}{b'})$, c'>0 , b'>0, a'>0, d'>0 sinyalinin grafiğini çiziniz.

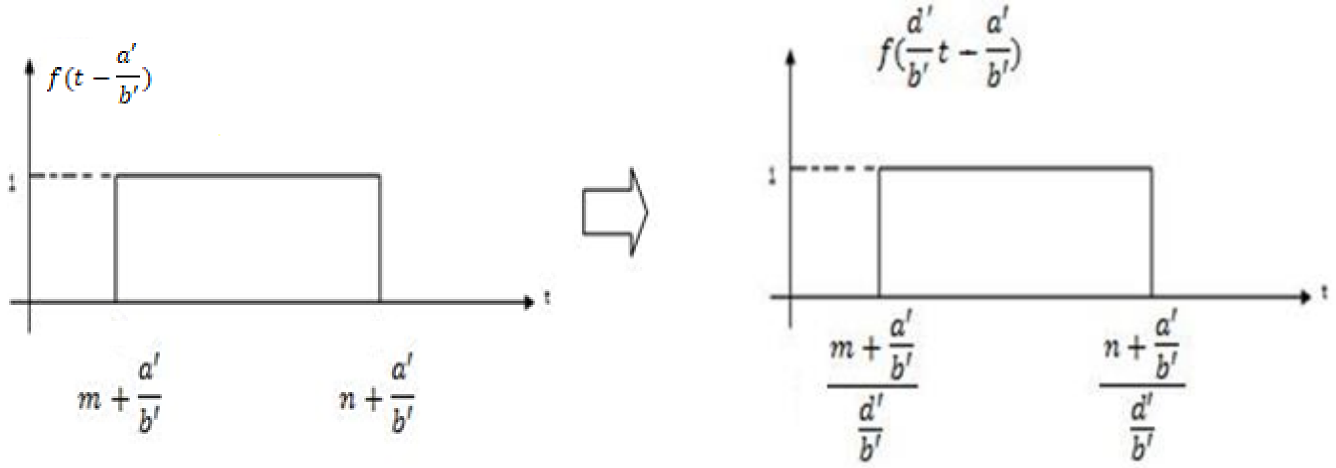
Çözüm:



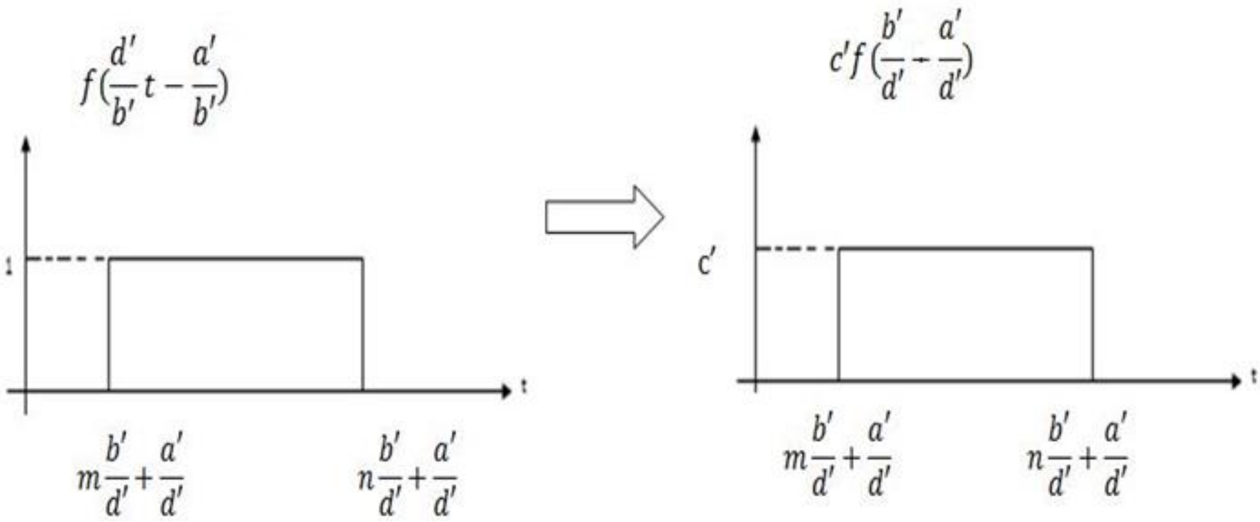
Önce $f\left(t-\frac{a'}{b'}\right)$ sinyalinin grafiğini çizelim:



Sonra $f\left(\frac{d'}{b'}t-\frac{a'}{b'}\right)$ sinyalinin grafiğini $f(t-\frac{a'}{b'})$'i kullanarak çizelim.

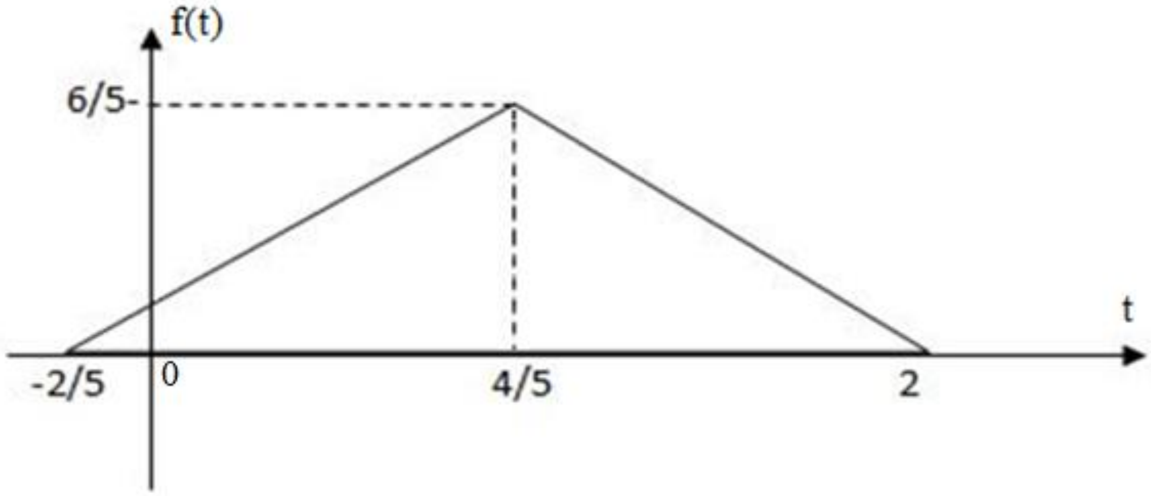


Son olarak da $f(\frac{d'}{b'}t-\frac{a'}{b'})$ sinyalinin genliğini c’ ile çarpalım.

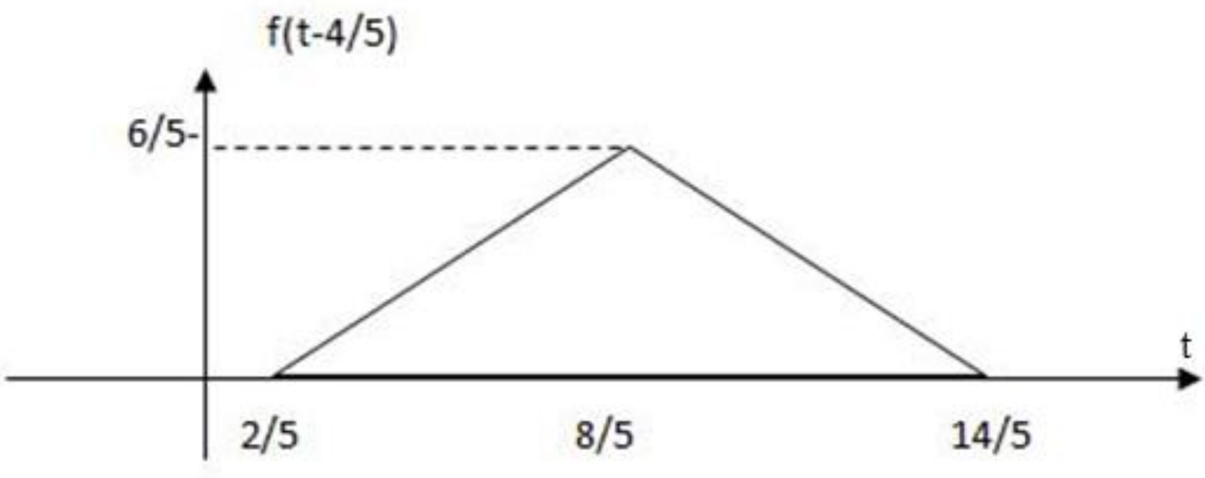


Örnek: Aşağıdaki f(t) sinyalinden elde edilen

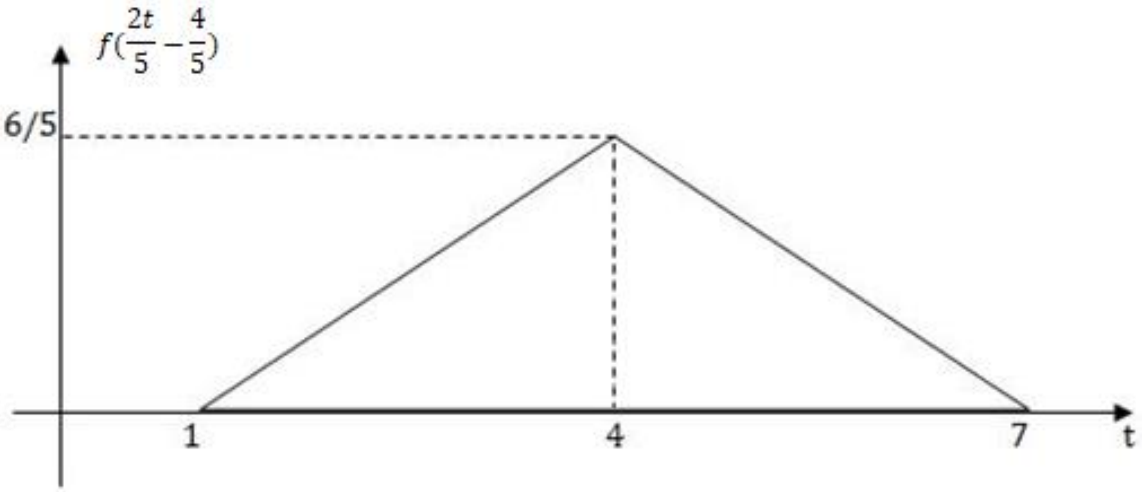
f($\frac{2t-4}{5}$)'in grafiğini çiziniz.



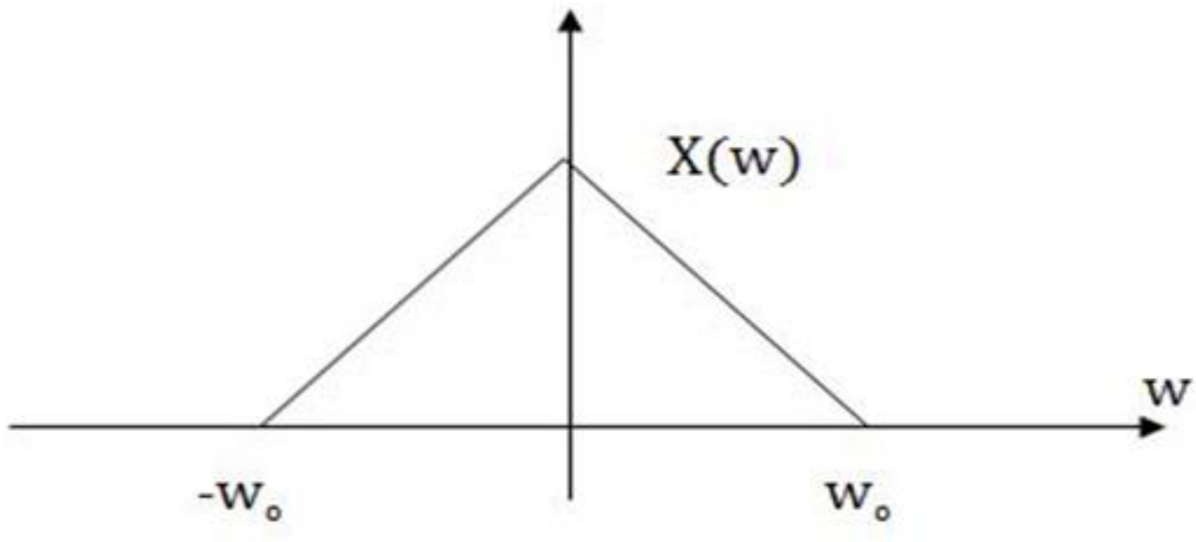
Çözüm: İlk olarak f(t-4/5)'in grafiğini çizelim. Bunun için f(t)'i 4/5 birim sağa kaydırmak gerekir.



Daha sonra, f(t-4/5) sinyalin yatay eksenini $\frac{2}{5}$ ile bölelim ($\frac{5}{2}$ ile çarpmaya eşdeğer)



<u>Örnek:</u> X(w) periyodik olmayan sürekli fonksiyonun w değişkenine göre grafiği aşağıda verilmiştir.

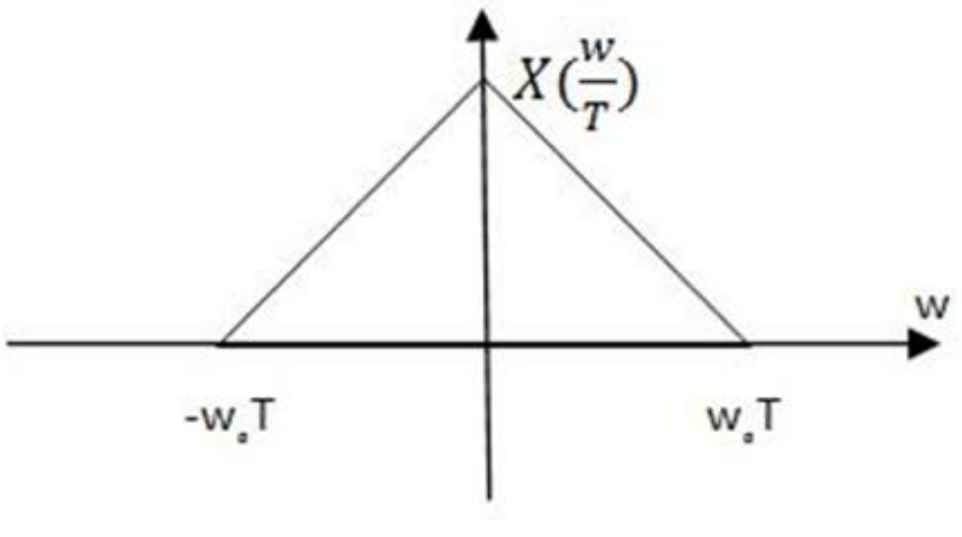


$Y(w) = \sum_{k} X\left(\frac{w - k2\pi}{T}\right)$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

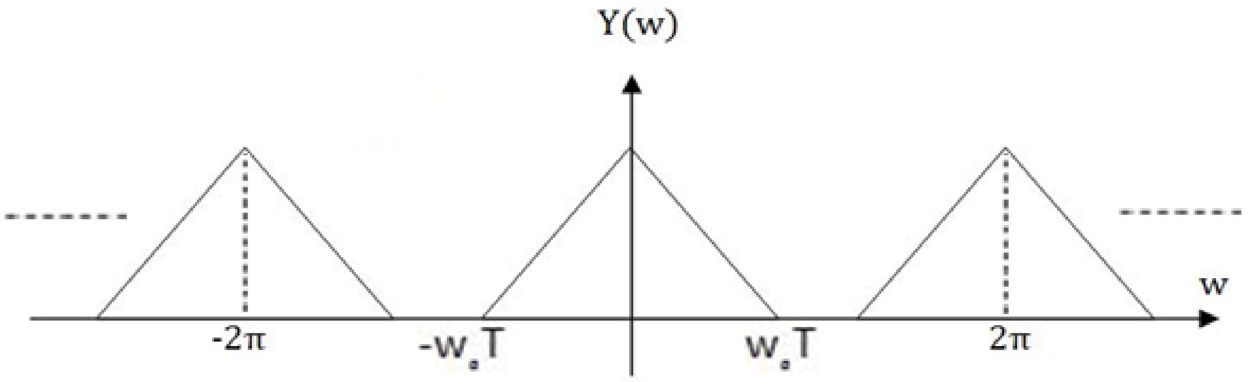
<u>Çözüm:</u> Y(w) ifadesini k=-2, k=-1, k=0, k=1, k=1 ve k=2 değerleri için yazacak olursak

$$Y(w) = \cdots X\left(\frac{w}{T} + \frac{4\pi}{T}\right) + X\left(\frac{w}{T} + \frac{2\pi}{T}\right) + X\left(\frac{w}{T}\right) + X\left(\frac{w}{T} - \frac{2\pi}{T}\right) + X\left(\frac{w}{T} - \frac{4\pi}{T}\right) + \cdots$$

- İlk olarak X(w/T) fonksiyonunu çizelim.



- $X\left(\frac{w}{T} - k\,\frac{2\pi}{T}\right)$fonkiyonunun grafiği de $X(\frac{w}{T})$'i sağa veya sola k2π kadar kaydırılması ile çizilir.



Ayrık Zamanlı Sinyallerin İşlenmesi

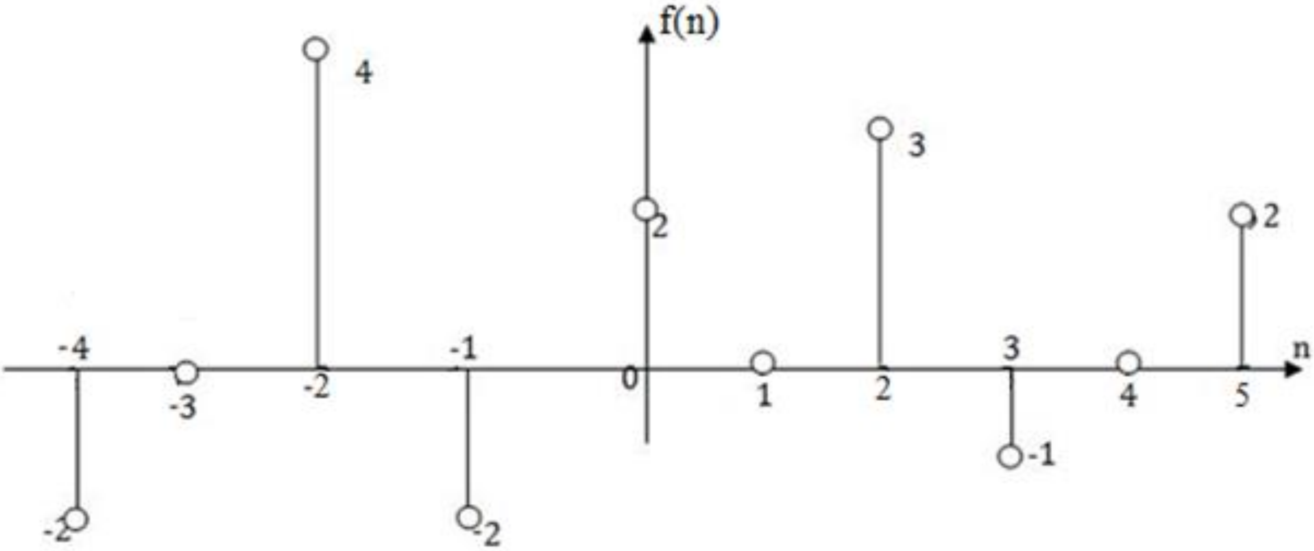
Ayrık zamanlı f(n) sinyali işlenerek g(n)=af(bn-c) sinyalinin oluşturulduğunu kabul edelim. g(n) sinyalinin grafiği aşağıdaki işlemleri yaparak çizebiliriz.

1. f(n) sinyalinin grafiği zaman ekseninde c birim kadar sağa (c>0 ise) veya sola (c<0 ise) kaydırılarak f(n-c) grafiği elde edilir.

2. f(n-c) fonksiyonunun grafiğinin zaman ekseni b ile bölünür ve sadece tam sayı bölüm sonuçları kaydedilir, diğerleri atılır. Böylece, f(bn-c)grafiği elde edilir.

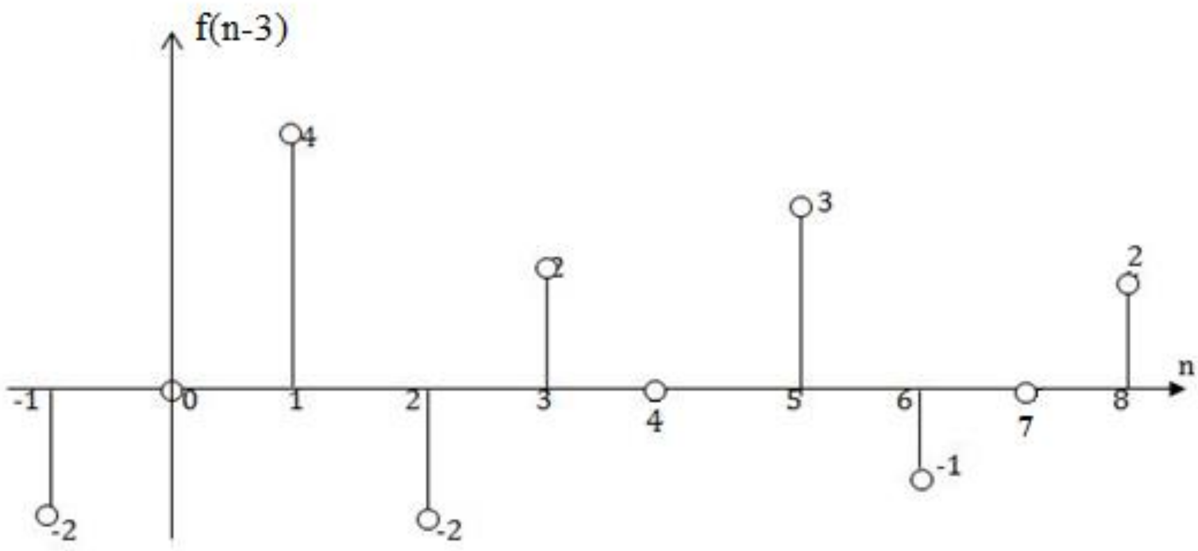
3. Son olarak da f(bn-c) sinyalinin genliği a ile çarpılarak af(bn-c) sinyalinin grafiği elde edilir.

<u>Örnek:</u> Aşağıda grafiği verilen f(n) sinyalinden, -2f(2n-3) sinyalinin grafiğini çiziniz.

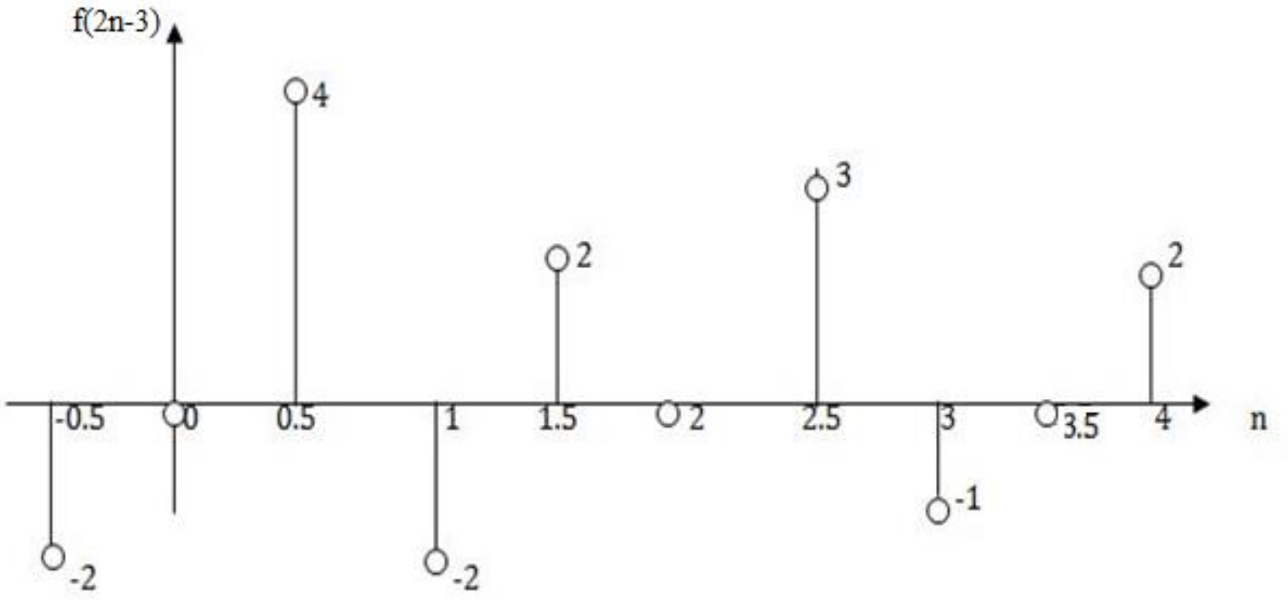


<u>Çözüm:</u>

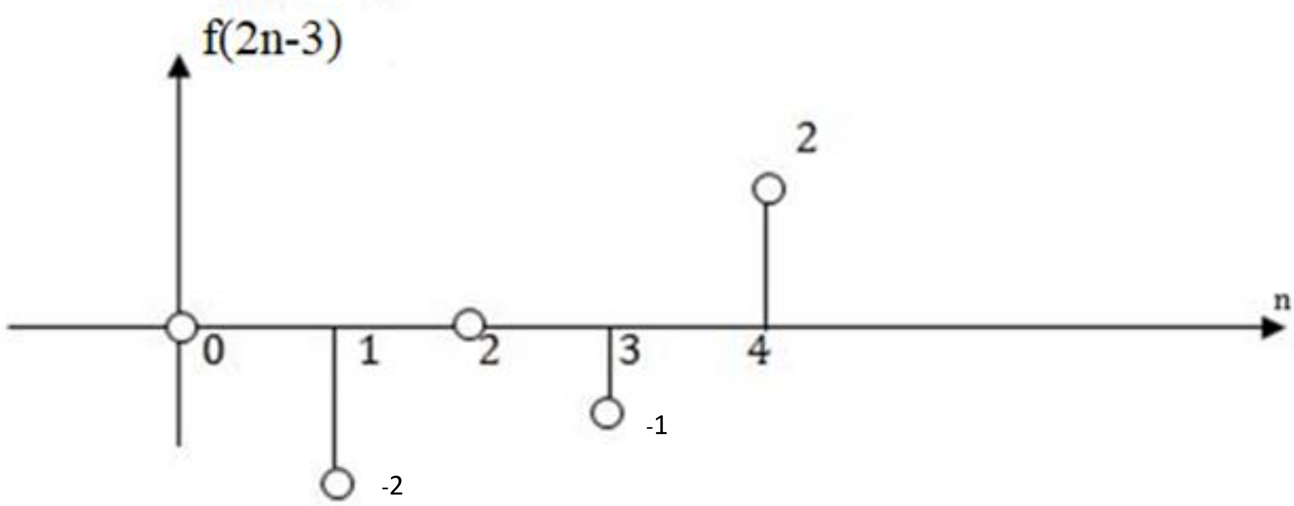
1. f(n) sinyalini zaman ekseninde 3 birim sağa kaydırarak f(n-3) sinyalini elde edelim.



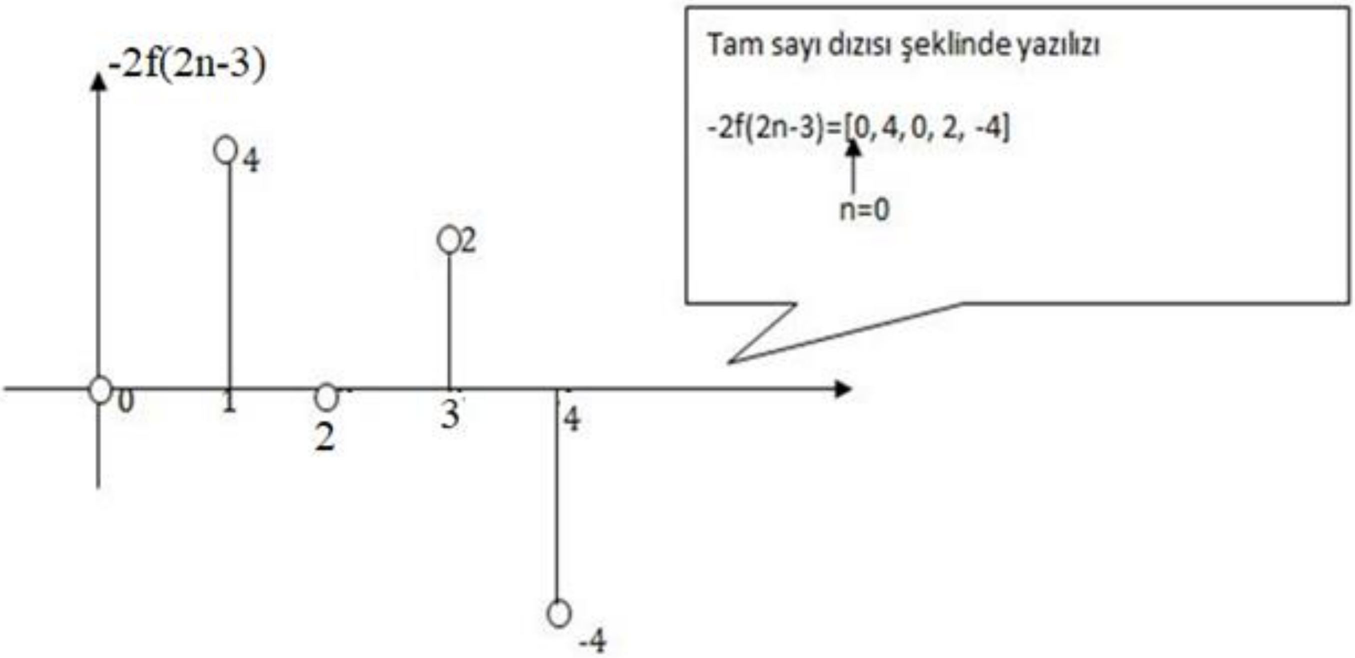
2. f(n-3) sinyalinin zaman eksenini 2 ile bölelim ve bölme sonucunda sadece tam sayı çıkan zaman değerlerini alarak f(2n-3) sinyalini oluşturalım.



Tamsayı olmayanları attıktam sonra (n tamsayı olmak zorunda)



3. Son olarak da f(2n-3) sinyalinin genliğini -2 ile çarparak -2f(2n-3) sinyalinin grafiği elde ederiz.



Not: Ayrık zamanlı bir sinyalin belirli bir zaman anında değeri belirtilmemişse, sinyalin o andaki değeri SIFIR kabul edilir.

Örnek: Aşağıda matematiksel dizin şeklinde verilen ayrık zamanlı sinyal f(n) işlenerek f(n/2) sinyali oluşturuluyor. f(n/2) sinyalini matematik dizini olarak yazınız.

$$f(n)=[-1, 2, \underset{\uparrow}{-1.5}, 3, 0.5, 0, 1, 0, -2]$$

$$n=0$$

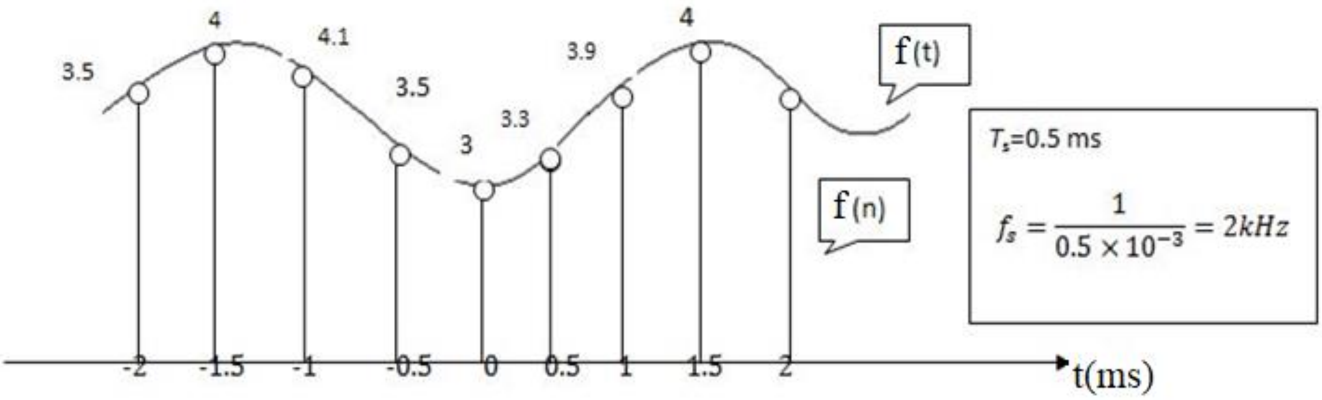
Çözüm: f(n/2) sinyalinin dizinsel ifadesini bulmak için, f(n) ifadesinin zaman ekseni ½ ile bölünür (veya 2 ile çarpılır). Bu durumda zaman ekseni genişleyecek ve örnekler arasında yeni zaman anları olacaktır.

$$f\left(\frac{n}{2}\right)=[-1, 0 , 2 , 0 , -1.5 , 0 , 3 , 0 , 0.5 , 0 , 0 , 0 , 1, 0 , 0 , 0 , -2]$$

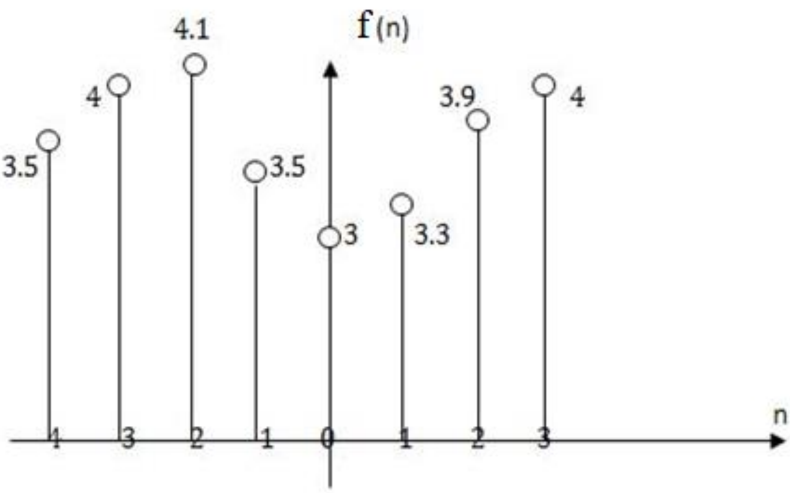
Alıştırma: Bir önceki örnekte verilen f(n) sinyalinin işlenmiş hali olan f(2n) sinyalinin dizinsel yazımını bulunuz.

Örnekleme: Sürekli zamanlı bir sinyalden belli sabit zaman aralıkarında örnekler alma işlemine örnekleme (sampling)denir.

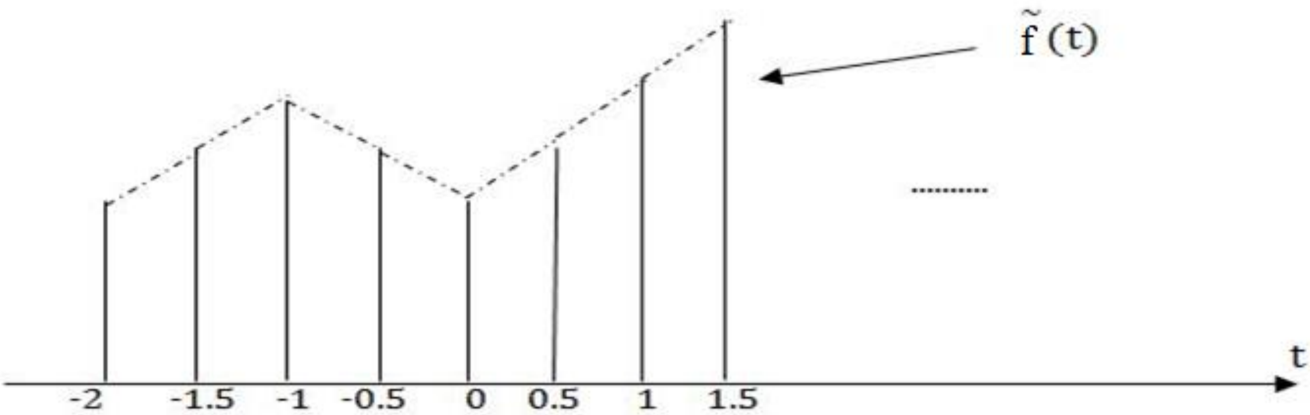
- f(t) sürekli zamanlı bir sinyal olsun. Bu sinyalden nTs anlarında örnekler alarak bir matematik dizini oluşturutur. Bu dizine dijital sinyal ismi verilir ve aşağıdaki gibi ifade edilir.



f(n) =[....3.5, 4, 4.1, 3.5, 3, 3.3, 3.9, 4, ...]



- Örnekler verici tarafından gönderilir. Alıcı tarafından ise alınan örnekler, gönderilen sürekli zaman sinyalini oluşturmak için kullanılır.



- Şekilden de görüldüğü gibi alıcı tarafındaki sinyalin [f~(t)] verici tarafındaki sinyale benzemesi için örnek sayısının artırılması ile mümkün olmaktadır.
- Örnekleme frekansı sinyalden saniyede kaç tane örnek alınacağı hakkında bilgi verir. Örneğin f_s= 1000Hz=1 kHz ise, sürekli zaman sinyalinden 1

saniyede 1000 tane örnek alınması anlamı taşır.

Bu da iki örnek arasındaki zaman aralığının

$T_s = \frac{1}{1000} = 1$ ms olması demektir.

- İletişimin en düşük tatmin edici seviyede yapılabilmesi için sürekli zaman sinyalinden yeterli kadar örnek almalıyız.
- **Nyquist Örnekleme Kıstası:** Örnekleme frekansı örneklenecek sinyalin içinde var olan en büyük frekansın en az iki katından daha büyük olmalıdır.

$$f_s > 2f_{max}$$

Örnek: Aşağıdaki sinyalin Nyquist örnekleme kıstası çerçevesinde örnekleme frekansıı bulunuz.

Örnekleme frekasının f_s=200Hz olduğunu kabul ederek, ayrık zamanlı sinyalin denklemini yazınız.

$$f(t)=3\cos(100\pi t)$$

Çözüm:

a. $f(t)=3\cos(100\pi t)$

$$100\pi=2\pi f \rightarrow f = 50 \text{ Hz}$$

$f_s \geq 100$Hz (Nyquist örnekleme frekansı)

b. $f(t)=f(nT_s)=3\cos(100\pi nT_s) = 3\cos(2\pi f n T_s)$

$$f = 50Hz \qquad f_s = 200\ Hz \quad T_s = \frac{1}{200} = 5ms$$

$$f(n) = 3\cos\left(\frac{100\pi}{200}n\right) = 3\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$$

N=0 f(0)=3

N=1 f(1)=0 ⇒ 4×5ms=20 ms

N=2 f(2)=-3

N=3 f(3)=0

N=4 f(4)=3 ← ayni değer

Örnek: Aşağıdaki sinyalin Nyquist örnekleme kıstası çerçevesinde örnekleme frekansını bulınuz.

$$f(t) = \sin(200\pi t) + \cos(850\pi t)$$

Çözüm: f(t) sinyali içindeki frekanslar :

$$w_1 = 200\pi = 2\pi f_1 \qquad f_1 = \frac{200\pi}{2\pi} = 100Hz$$

$$w_2 = 850\pi = 2\pi f_2 \qquad f_2 = \frac{850\pi}{2\pi} = 425Hz$$

Görüldüğü gibi f(t) sinyalinin en büyük frekansı f_2'dir. Nyquist örnekleme kıstasına göre, örnekleme frekansı aşağıdaki gibi olmalıdır.

$$f_s \geq 2f_s = 2 \times 425 = 850Hz = 0.85\ kHz$$

- f(t) sinyalini dijital olarak gönderme sırasında bir saniyede en az 850 örnek gönderilmelidir.

- Eğer 850 örneğin altında gönderim yapılırsa, alıcıda f(t) sinyalinin tekrar çatılması mümkün olmaz.

Sinyal İşlemede Kullanılan Ana Sinyaller

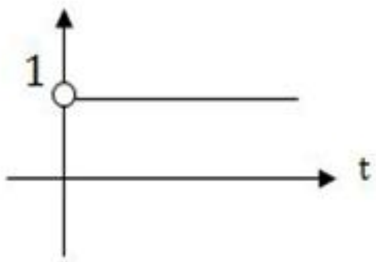
1. Sürekli Zamanlı Temel Sinyaller

a. Birim Adım Fonksiyonu:

$$u(t)=\begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t<0 \end{cases} \quad \text{veya} \quad u(t)=\begin{cases} 1, & t>0 \\ 0.5 & t=0 \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

1. Tanım

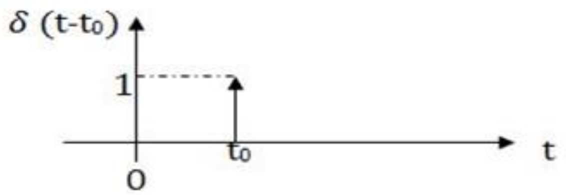
2. Tanım $u(t)+u(-t)=1$



b. Birim Dürtü Fonksiyonu

$$\delta(t)=\begin{cases} 1, & t=0 \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

$$\delta(t-t_0)=\begin{cases} 1, & t=t_0 \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

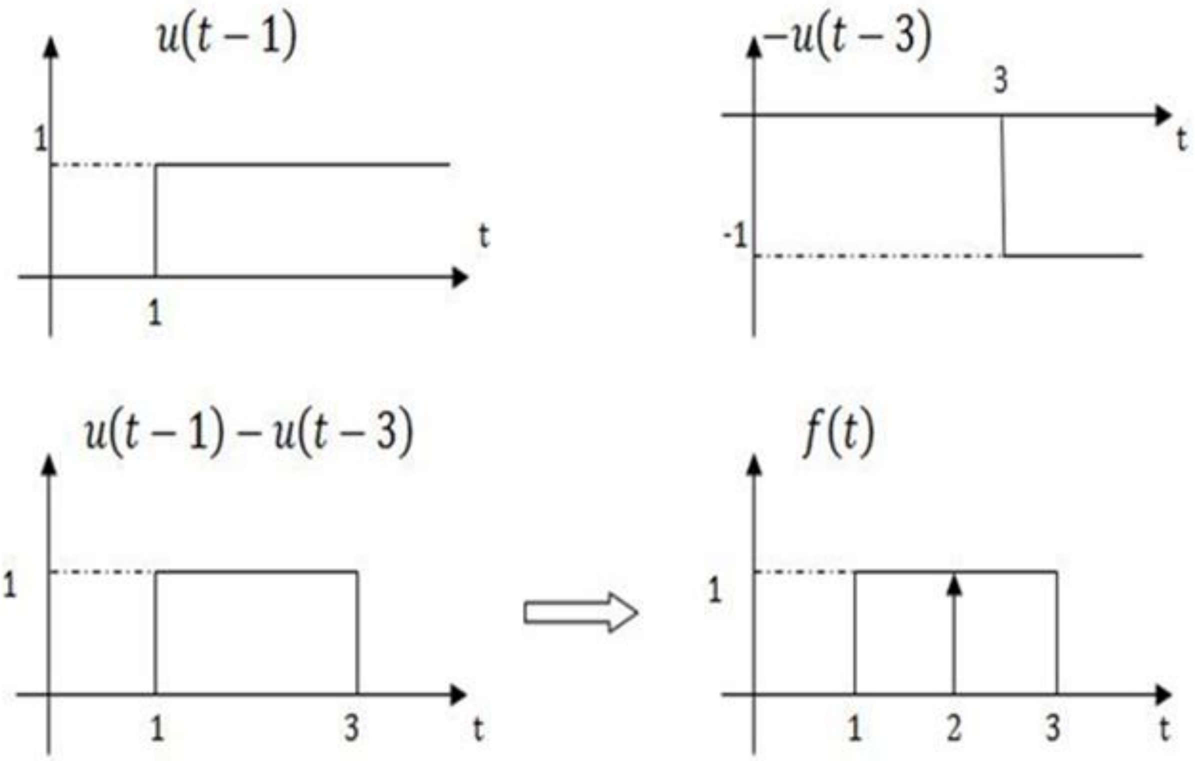


c.Ramp Fonksiyonu

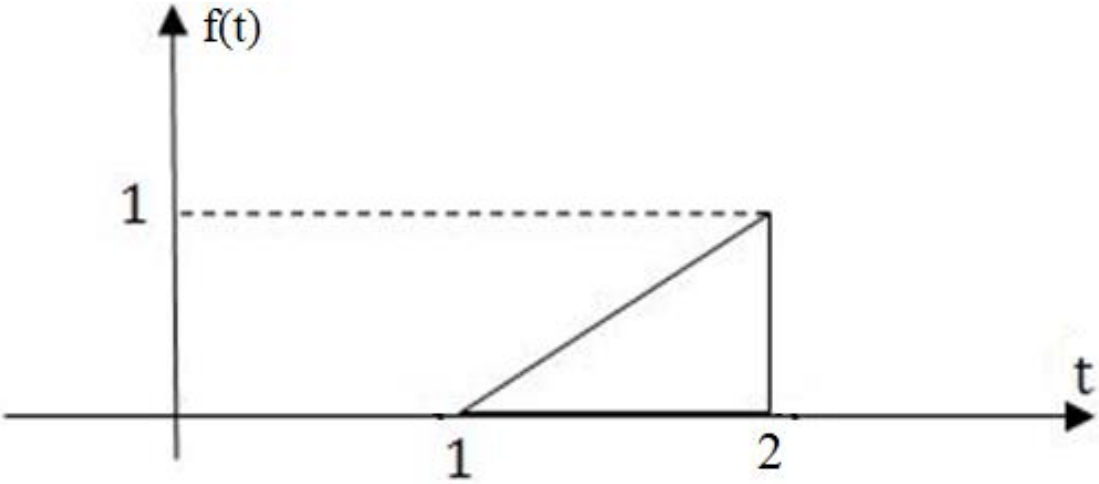
$$r(t)=\begin{cases} t, & t\geq 0 \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

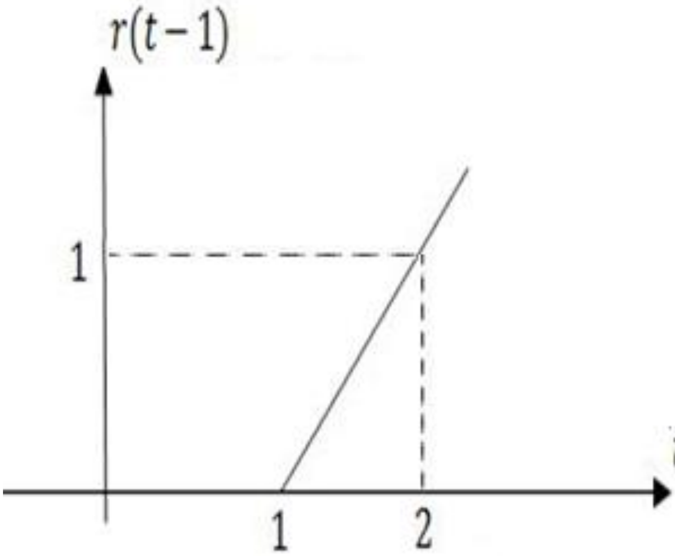
Örnek: $f(t)=u(t-1)-u(t-3)+\delta(t-2)$ fanksiyonunun grafiğini çiziniz.

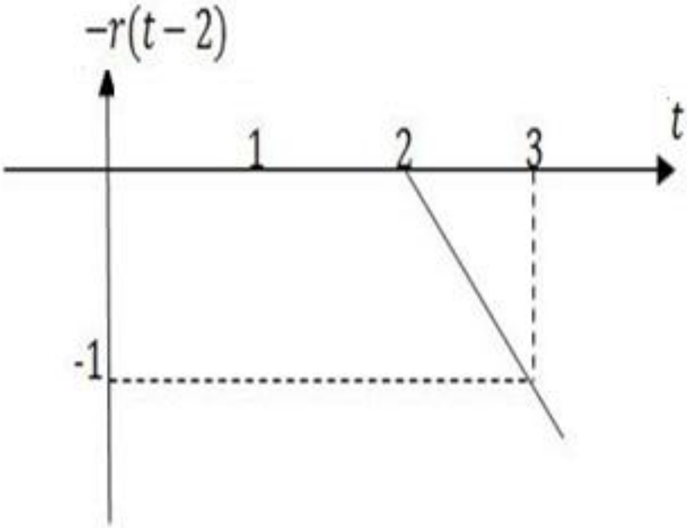
Çözüm:



Örnek: Aşağıda grafiği verilen fonksiyonu ramp ve birim adım fonksiyonları türünden (cinsinden) ifade ediniz.

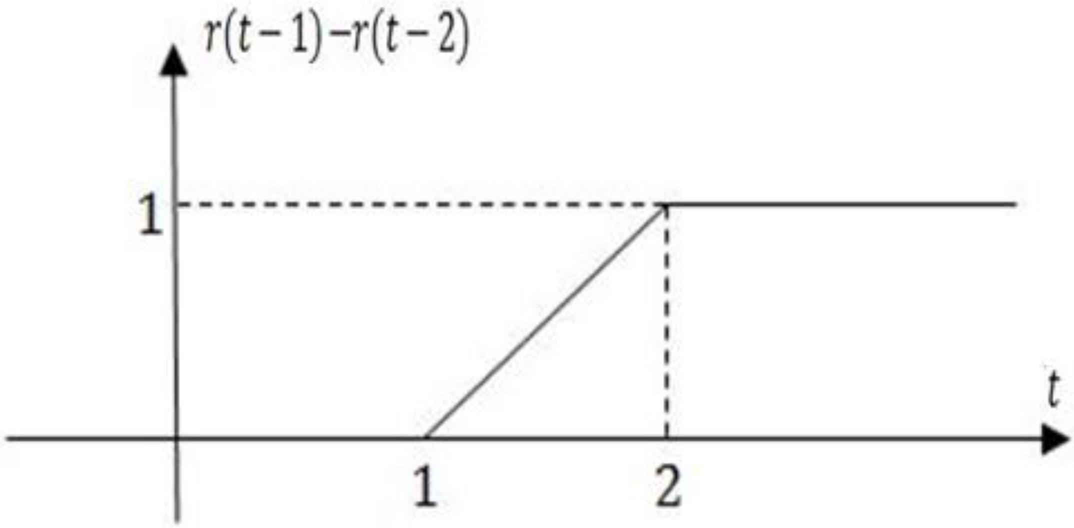




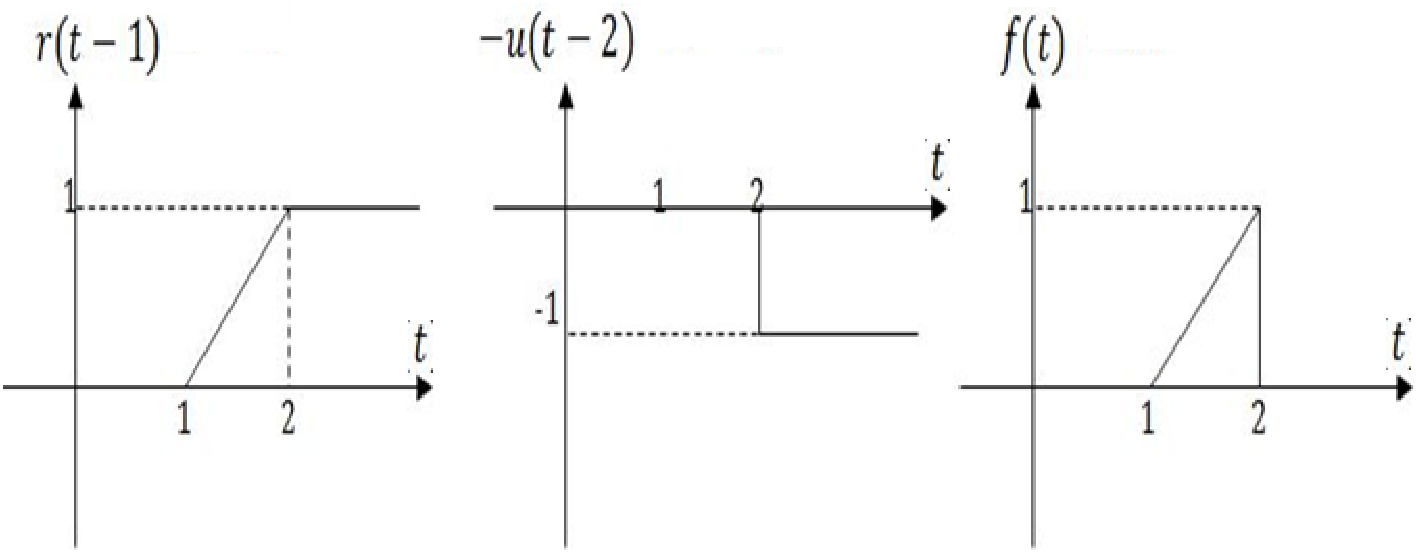


Çözüm:

- Bu iki ramp fonksiyonunu toplarsak aşağıdaki fonksiyonu elde ederiz.



- Bu fonksiyondan t=2'den itibaren oluşan birim adım fonksiyonunu çıkarırsak istenen fonksiyonu elde ederiz.



Alıştırmalar:

$$f(t) = \delta(t+2) + \delta(t-3)$$

$$f(t) = -\delta(t+3) + \delta(t)$$

$$f(t) = u(t-3)$$

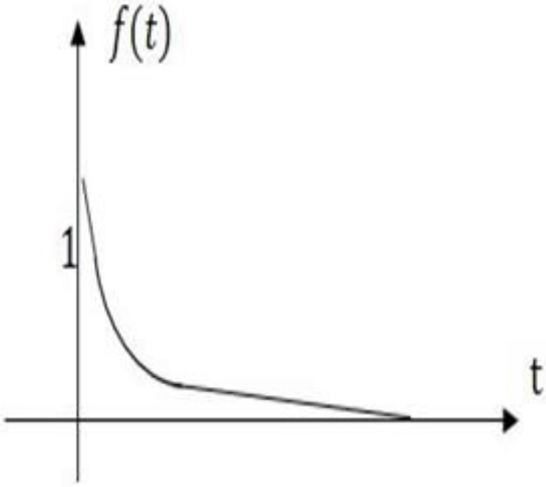
$$f(t) = u(t-1) + u(t-4)$$

$$f(t) = r(t-3)$$

$$f(t) = r(t-1) + r(t-2) - 2r(t-5)$$

d.Üstel Fonksiyon

$$f(t)=\begin{cases} ke^{-t}, & t\geq 0 \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$



e.Sinüzoidal Fonksiyon

$$f(t) = k\cos\left(\frac{2\pi}{T} + \theta\right) \qquad T = \frac{1}{f},$$

$$\theta = faz\ fark\imath \qquad w = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

w=Açısal frekans

Örnek: $f(t) = \cos(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{2})$ sinyalinin frekansını periyodunu, açısal frekansını ve faz farkını bulunuz.

Çözüm:

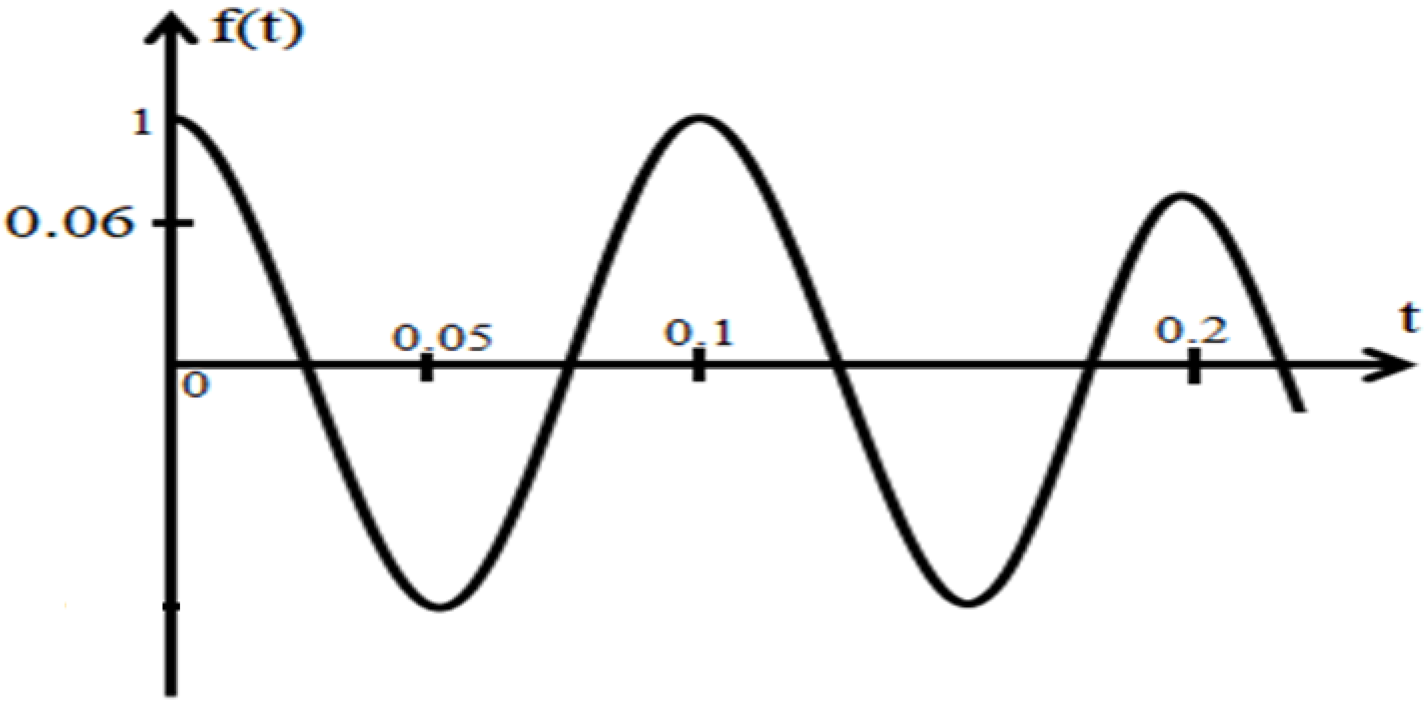
$$w = \frac{\pi}{3} = 2\pi f \Longrightarrow f = \frac{\pi}{3\times 2\pi} = \frac{1}{6}Hz$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{1/6} = 6\ s, \quad w = 2\pi f = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}rad/s\ ,\ \theta = \frac{\pi}{2}rad$$

f.Üstel Sönümlü Sinüzoidal Fonksiyon

$$f(t) = ke^{-\alpha t}\cos(\frac{2\pi}{T}t + \theta)$$

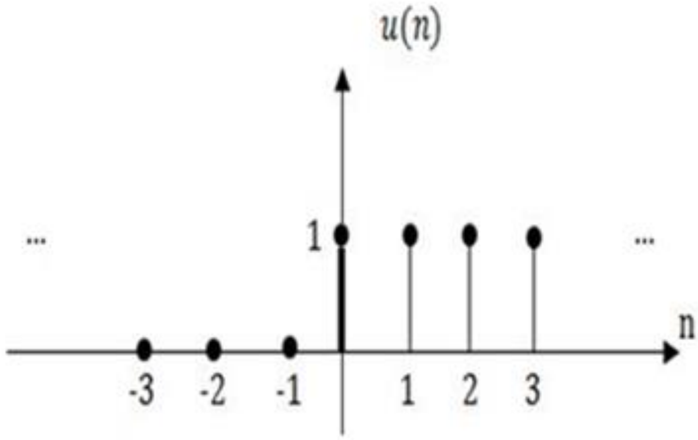
$$K = 1, \alpha = 5, \theta = 0, T = 0.1 \; değerleri \; için$$



2.Ayrık Zamanlı Temel Sinyal Fonksiyonları

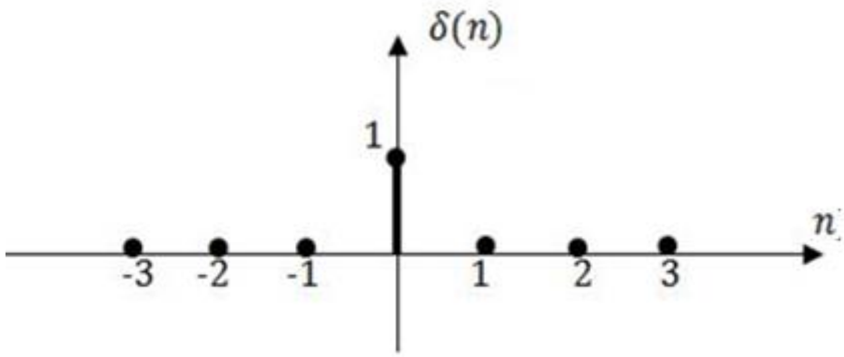
a. Birim Adım Fonksiyonu:

$$u(n)=\begin{cases} 1, & n\geq 0 \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

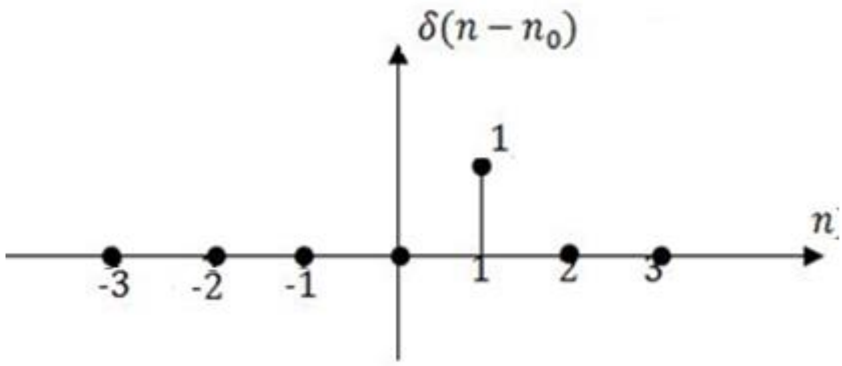


b.Birim Dürtü Fonksiyonu

$$\delta(n)=\begin{cases} 1, & n=0 \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$



$$\delta(n-n_0)=\begin{cases} 1, & n=n_0 \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$



Birim adım fonksiyonu ile birim dürtü fonksiyonu arasındaki bağlantı

$$\delta(n) = u(n) - u(n-1) \qquad veya$$

$$u(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta(k)$$

⇨ Önce k'dan n çıkarılsın

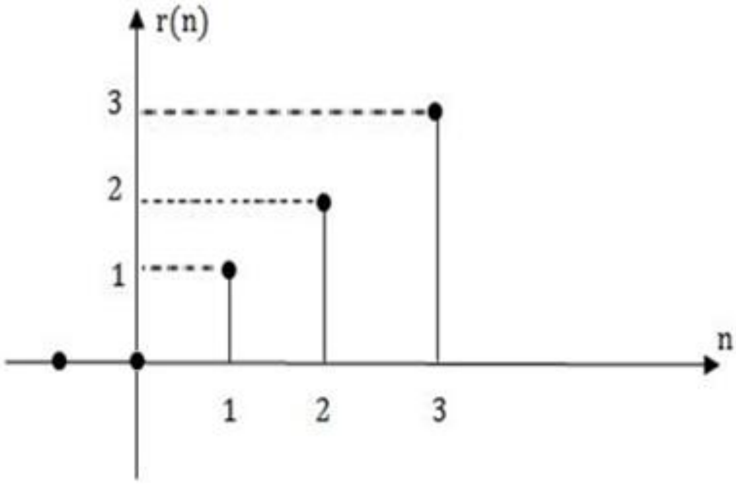
$$u(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta(k) = \sum_{k=-\infty}^{0} \delta(k+n)$$

⇨ Sonra k yerine –k yazalım

$$u(n) = \sum_{k=-\infty}^{0} \delta(k+n) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(n-k)$$

c.Ramp Fonksiyonu:

$$r(n)=nu(n)=\begin{cases} n, & n \geq 0 \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$



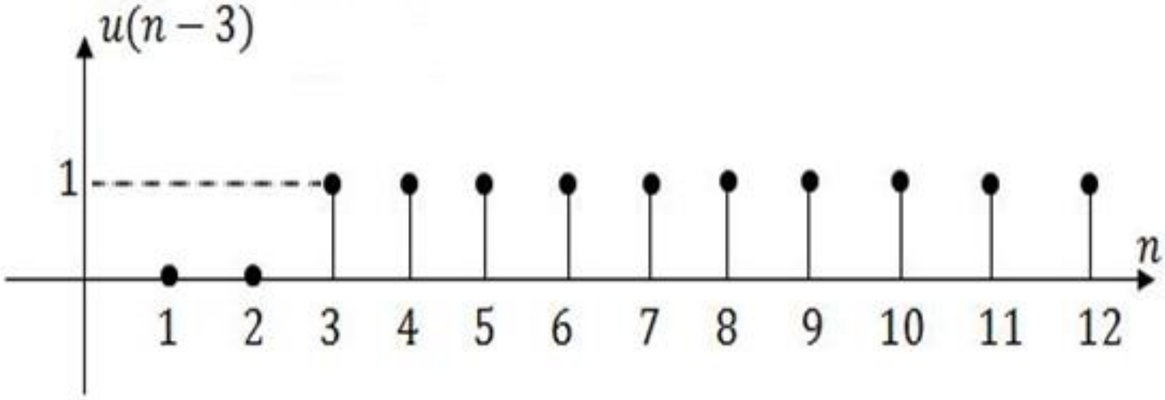
⇨ Birim adım fonksiyonu ile ramp fonksiyonu arasındaki bağlantı

$$u(n-1) = r(n) - r(n-1) \quad veya$$

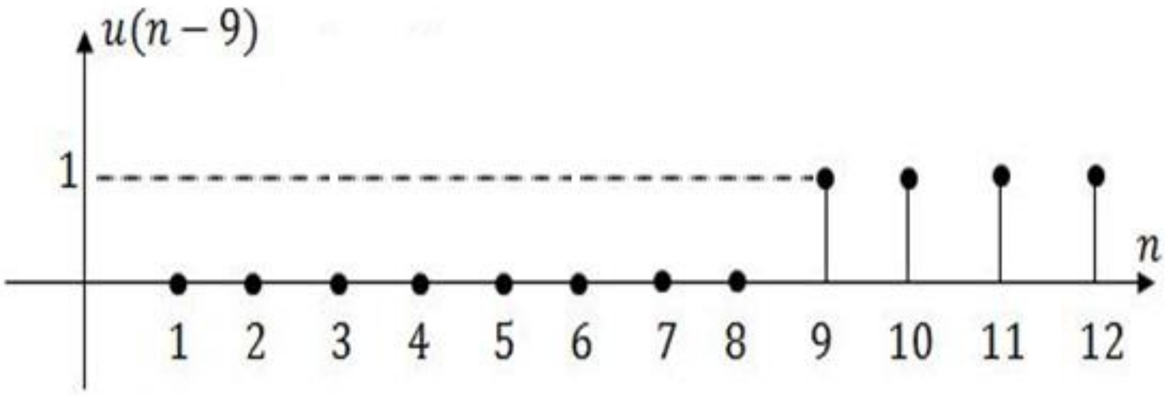
$$r(n) = \sum_{k=0}^{\infty} k\delta(n-k)$$

Örnek: $f(n) = u(n-3) - u(n-9)$ fonksiyonun grafiğini çiziniz.

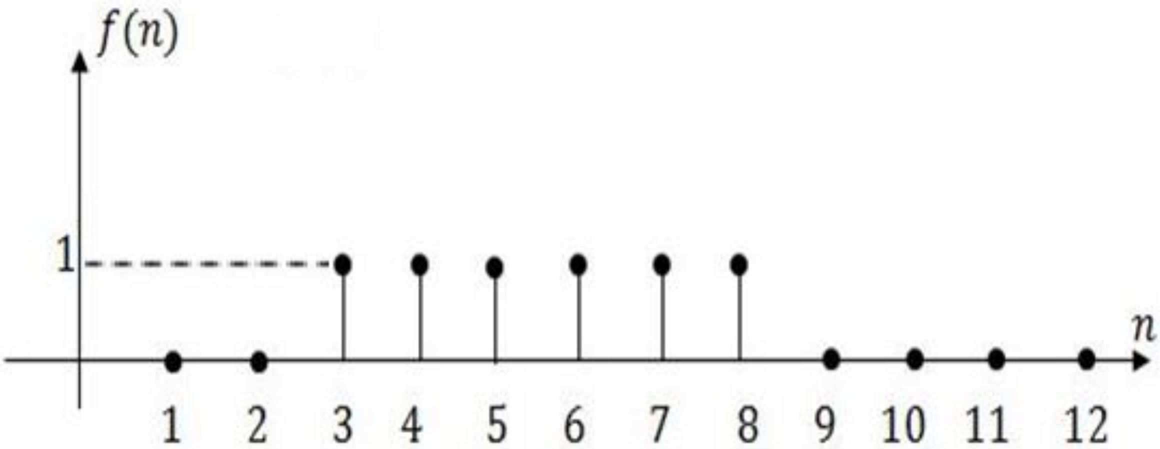
Çözüm:



u(n − 3)
1
n
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12



u(n − 9)
1
n
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

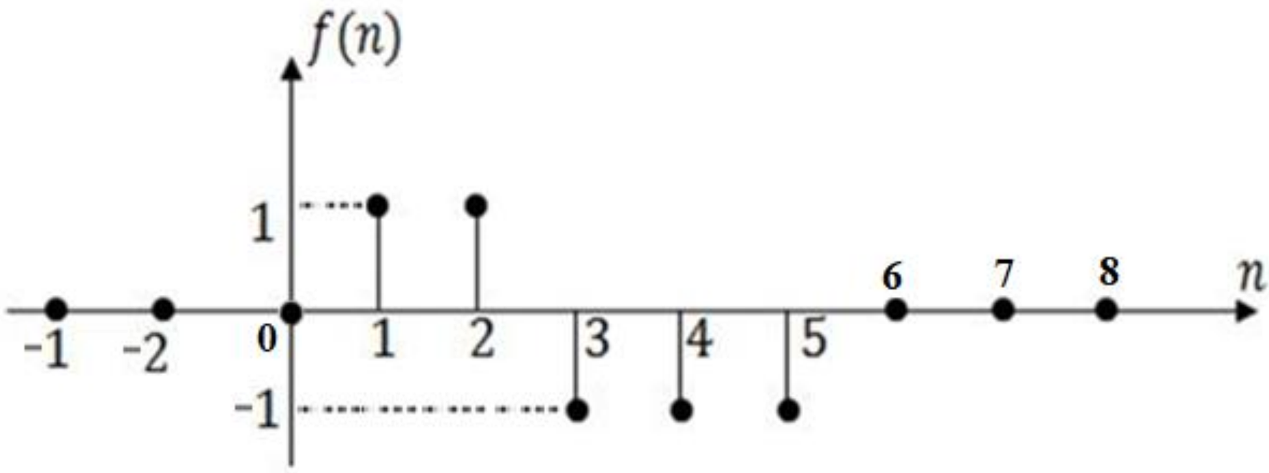


f(n)
1
n
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

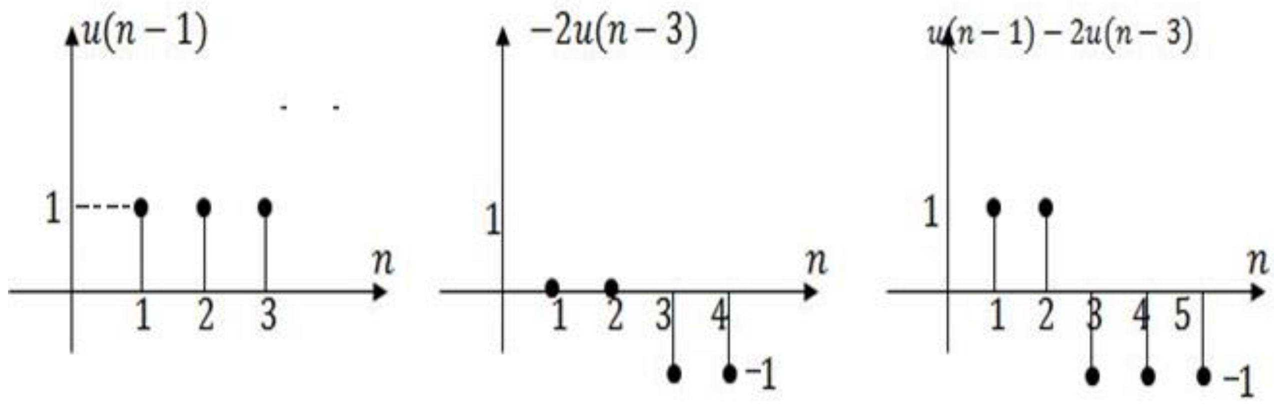
d.Ayrık Zamanlı Üstsel Fonksiyon:

$$f(n)=\begin{cases} ke^{-n}, & n \geq 0 \\ 0, & \text{diğer} \end{cases} \Longrightarrow \quad f(n) = ke^{-n}u(n)$$

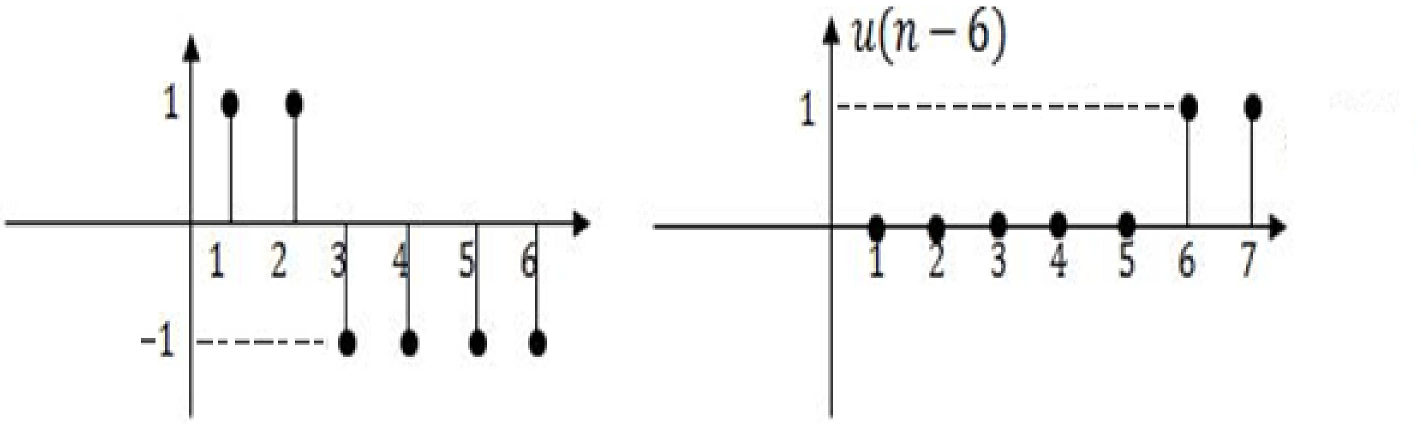
Örnek: Aşağıdaki grafiği verilen fonksiyonu birim adım fonskiyonları türünden yazınız.



Çözüm: Fonksiyon incelendiğinde n=0, n=3 ve noktalarında değişim olduğu görülebilir, n=1 ve n=3 göz önüne alarak aşağıdaki fonksiyonu yazabiliriz.



- n=6 noktasından itibaren fonksiyonun genliği 0 olduğu için, bu noktadan itibaren $u(n-1) - 2u(n-3)$ fonksiyonun $u(n-6)$ eklememiz gerekmektedir.



$$f(n) = u(n-1) - 2u(n-3) + u(n-6)$$