Bölüm 6
Z-DÖNÜŞÜM

- Sürekli zamanlı sinyallerin zaman alanından frekans alanına geçişi Fourier ve Laplace dönüşümleri ile mümkün olmaktadır.
- Laplace, Fourier dönüşümünün daha genel bir şeklidir.

- Ayrık zamanlı sinyaller için de ayrık zamanlı Fourier dönüşümleri kullanılmatadır.

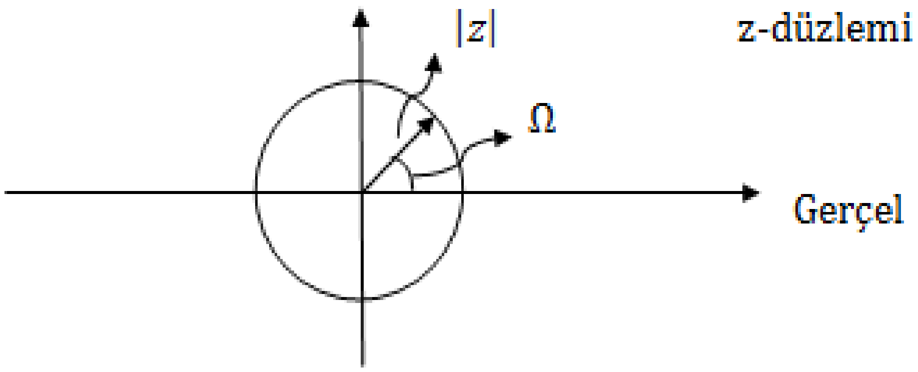
- z dönüşüm de ayrık zamanlı Fourier dönüşümünün daha genel bir şeklidir.

Ayrık zamanlı *f(n)* sinyalinin (veya dizinin) z dönüşümü aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) z^{-n}$$

Burada z karmaşık bir değişkendir ve aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$z = |z|e^{j\Omega}$$



$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\left(|z|e^{j\Omega}\right)^{-n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} [f(n)|z|^{-n}]e^{-j\Omega n}$$

Buradan da görüldüğü gibi, *f(n)* sinyalinin z dönüşümü $f(n)|z|^{-n}$ sinyalinin Fourier dönüşümüdür.

- $|z| = 1$ olduğu zaman, z-dönüşüm=Fourier dönüşüm olur.

- Her *f(n)* sinyalinin z-dönüşüm sonlu bir ifade olmayabilir, ya da belli aralıktaki z değerleri için sonlu olabilir.
- *f(n)* sinyalinin z dönüşümünün hangi aralıktaki z değerleri için sonlu olduğunun belirlenmesine, z dönüşümünün yakınsama bölgesinin bulunması denir.

<u>Örnek:</u> Aşağıdaki dizilerin z-dönüşümünü hesaplayınız ve yakınsama bölgesini bulunuz.

a) $x(n) = \{1, 2, \underset{\substack{\uparrow \\ n=0}}{5}, 7, 0, 1\}$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = X(z) = z^2 + 2z + 5$$

$$+7z^{-1} + z^{-3}$$

$-->X(z)\ \ z = 0\ ve\ z = \infty$ değerleri için tanımsız olmakta, diğer bütün z değerleri için sonlu olmaktadır. O halde yakınsama bölgesi, z=0 ve z=∞ hariç bütün z düzlemidir.

b) $$y(n) = \{0, 0, 1, 2, 5, 7, 0, 1\}$$
$\uparrow$
n=0

$$Y(z) = z^{-2} + 2z^{-3} + 5z^{-4} + 7z^{-5} + z^{-7}$$

Yakınsama bölgesi: z=0 hariç, bütün z düzlemidir.

Z-Dönüşümün Özellikleri

1) Doğrusallık:

$a_1x_1(n) + a_2x_2(n)$ sinyalinin z-dönüşümü
$a_1X_1(z) + a_2X_2(z)$ dir.

2) Zaman Kaydırma

$x(n - n_0)$ sinyalinin z-dönüşümü $X(z)z^{-n_0}$ dir.

Örnek: $x(n) = \{1, 2, 5, 7, 0, 1\}$ ise
$\uparrow$
n=0

$a)\ x_1(n) = x(n + 2)$

$b) x_2(n) = x(n - 2)$

sinyallerinin z-dönüşümünü bulunuz.

a) $$X_1(z) = X(z)z^2$$
$$X(z) = z^2 + 2z + 5 + 7z^{-1} + z^{-1}$$
$$X_1(z) = z^4 + 2z^3 + 5z^2 + 7z + z^{-1}$$

b) $$X_2(z) = X(z)z^{-2}$$
$$= 1 + 2z^{-1} + 5z^{-2} + 7z^{-3} + z^{-5}$$

Örnek: Aşağıdaki ayrık zamanlı sinyallerin evrişimini bulunuz.

$$x_1(n) = \{\underset{\substack{\uparrow \\ n=0}}{1}, -2, 1\}$$

$$x_2(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 5 \\ 0, & diğer \end{cases}$$

Çözüm 1: *$x_1(n)$*'in z-dönüşümü

$$X_1(z) = 1 - 2z^{-1} + z^{-2}$$

$x_2(n)$'in z-dönüşümü

$$X_2(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} + z^{-5}$$

$$X(z) = X_1(z)X_2(z) =$$

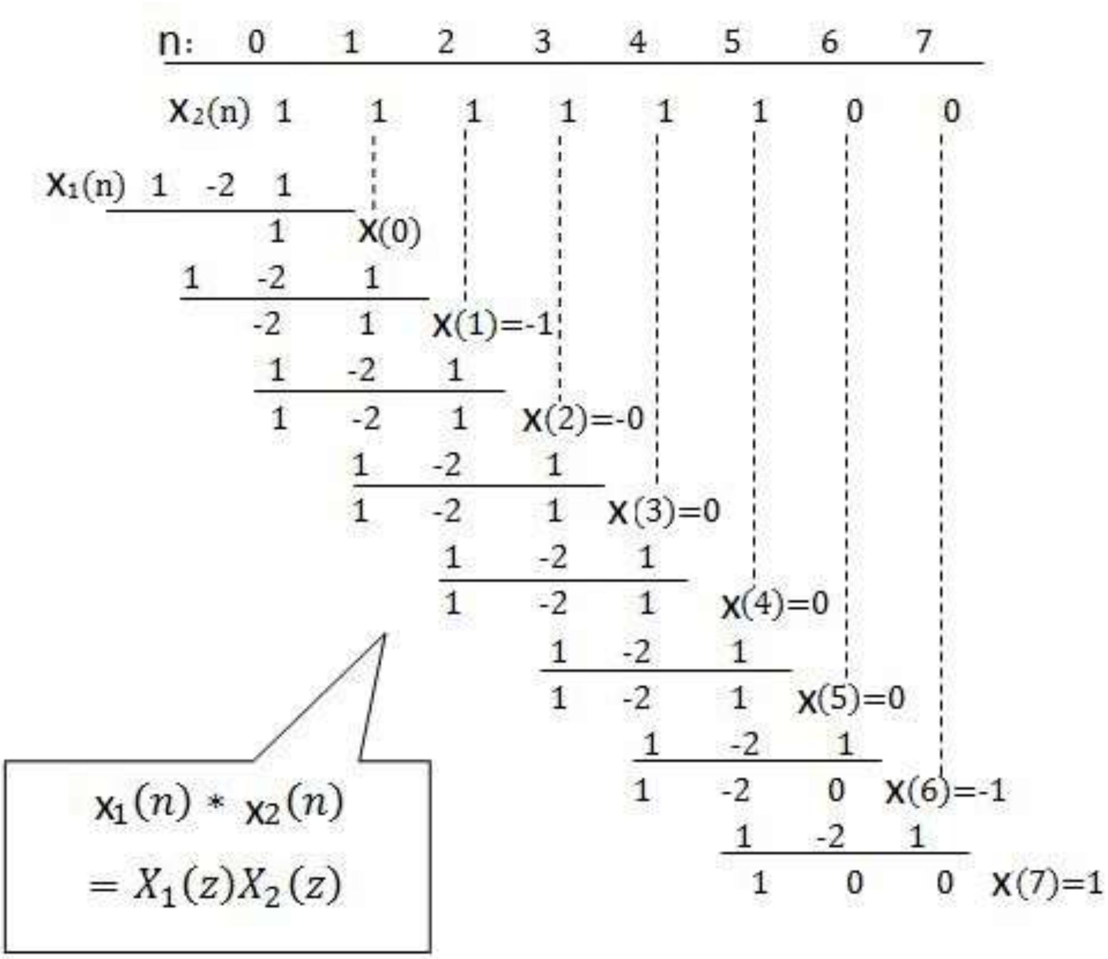
$$(1 - 2z^{-1} + z^{-2})(1 - z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} + z^{-5})$$

$$= 1 - z^{-1} + z^{-6} + z^{-7}$$

Ters z-dönüşüm alınırsa

$$x(n) = \{\underset{\substack{\uparrow \\ n=0}}{1}, -1, 0, 0, 0, 0, -1, 1\}$$

<u>Çözüm 2:</u> $x_1(n)$ ile $x_2(n)$ sinyallerinin evrişimi



Kutuplar ve Sıfırlar

- Bir z-dönüşümünün kutupları, o z-dönüşümünü sonsuza götüren z değerleridir.
- Bir z-dönüşümünün sıfırları, o z-dönüşümünü sıfıra götüren z değerleridir.

Örnek: $X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}$ fonksiyonunun kutup ve sıfırlarını bulunuz.

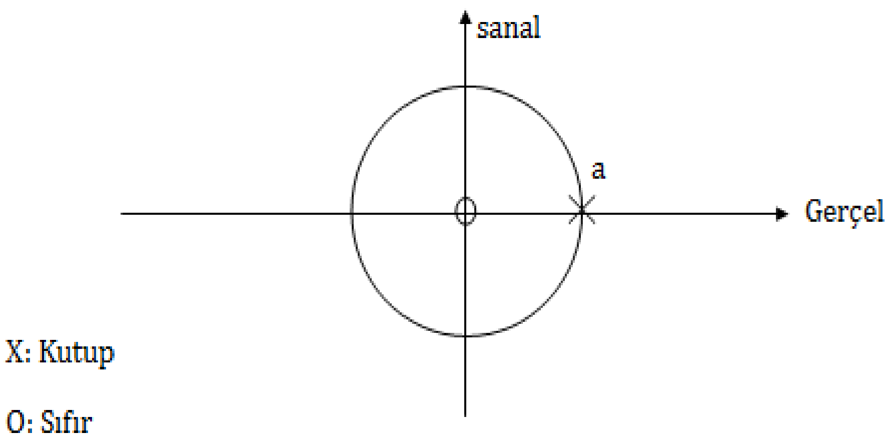
Çözüm: $X(z)$ fonksiyonunun pay ve paydasını z ile çarpalım

$$---> \quad X(z) = \frac{z}{z-a}$$

Sıfır: $z = 0 \quad --\rightarrow \quad X(z) = 0$

Kutup: $z = a \quad --\rightarrow \quad X(z) = \infty$

Örnek: Yukardaki örnekte verilen $X(z)$ fonksiyonunun kutup-sıfır grafiğini çiziniz.



Ters Z-Dönüşüm

z-dönüşümü olan bir fonksiyonun ters z-dönüşümü aşağıdaki yöntemler aracılığı ile bulunabilir.

1)Polinom Bölümü ve Genişletme Metodu

Burada, pay ve payda z^n, z^{n-1}, z^{n-2} veya z^{-1}, z^{-2}, z^{-3} şeklinde yazılarak, uzun bölme işlemi yapılır ve elde edilen bölme sonucunun ters z dönüşümü alınır.

Örnek: $X(z) = \frac{1}{1-1.5z^{-1}+0.5z^{-2}}$

x(n)'i bulunuz.

Nedensel Olan Çözüm:

$$
\begin{array}{l|l}
1-\frac{3}{2}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2} & 1 \\
\hline
\text{Bölüm: } 1+\frac{3}{2}z^{-1}+\frac{7}{4}z^{-2}+\frac{15}{8}z^{-3}+\ldots &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r}
1 \\
-(1-\frac{3}{2}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}) \\
\hline
\frac{3}{2}z^{-1}-\frac{1}{2}z^{-2} \\
-(\frac{3}{2}z^{-1}-\frac{9}{4}z^{-2}+\frac{3}{4}z^{-3}) \\
\hline
\frac{7}{4}z^{-2}-\frac{3}{4}z^{-3} \\
-(\frac{7}{4}z^{-2}-\frac{21}{8}z^{-3}+\frac{7}{8}z^{-4}) \\
\hline
\frac{15}{8}z^{-3}-\frac{7}{8}z^{-4}
\end{array}
$$

$$X(z) = 1+\frac{3}{2}z^{-1}+\frac{7}{4}z^{-2}+\frac{15}{8}z^{-3}+\cdots$$

$$x(n) = \left\{\underset{\substack{\uparrow \\ n=0}}{1},\frac{3}{2},\frac{7}{4},\frac{15}{8},\ldots\right\}$$

Nedensel

Nedensel Olmayan Çözüm:

$$
\begin{array}{l|l}
 & 2z^2 + 6z^3 + 14z^4 + 30z^5 + 62z^6 + \cdots \\
\hline
\frac{1}{2}z^{-2} - \frac{3}{2}z^{-1} + 1 & 1 \\
 & -(1 - 3z + 2z^2) \\
 & \quad 3z - z^2 \\
 & \quad -(3z - 9z^2 + 6z^2) \\
 & \qquad 7z^2 - 6z^3 \\
 & \qquad -(7z^2 - 21z^3 + 14z^4) \\
 & \qquad\quad 15z^3 - 14z^4 \\
 & \qquad\quad -(15z^3 - 45z^4 + 30z^5) \\
 & \qquad\qquad 31z^4 - 30z^5
\end{array}
$$

$X(z) = 2z^2 + 6z^3 + 14z^4 + 30z^5 + 62z^6 + \cdots$

$x(n) = \{\ldots, 62, 30, 14, 6, 2, 0, \underset{\uparrow}{0}\}$ ⇦ Nedensel Değil

n=0

Örnek: $X(z) = \frac{1+27z^{-1}+z^{-2}}{1-z^{-1}+0.3561z^{-2}}$ x(n)'i bulunuz.

$$
\begin{array}{l|l}
 & 1 + 3z^{-1} + 3.6439z^{-2} + 2.5762z^{-3} + \cdots \\
\hline
1 - z^{-1} + 0.3561z^{-2} & 1 + 2z^{-1} + z^{-2} \\
 & -(1 - z^{-1} + 0.3561z^{-2}) \\
 & \quad 3z^{-1} + 0.6439z^{-2} \\
 & \quad -(3z^{-1} 3z^{-2} + 1.06832z^{-3}) \\
 & \qquad 3.6439z^{-2} - 1.0683z^{-3} \\
 & \qquad -(3.6439z^{-2} - 3.6439z^{-3} + 1.2975z^{-4}) \\
 & \qquad\quad 2.5756z^{-3}
\end{array}
$$

$X(z) = 1 + 3z^{-1} + 3.6439z^{-2} + 2.5756z^{-3} + \cdots$

$x(n) = \{\underset{\uparrow}{1}, 3, 3.6439, 2.5756, \ldots\}$ Nedensel

n=0

2) Kısmı Kesir Genişletimi(Partial Fraction Expansion)

- Bu yöntemde, z-dönüşümü kısmı kesirlerin toplamı şeklinde genişletilir.
  $X(z) = \propto_1 X_1(z) + \propto_2 X_2(z) + \cdots \propto_k X_k(z)$
- Her kısmı kesirin ters z-dönüşümü bulunur.
- Bulunan sonuçlar birleştirilerek, X(z)'nin dönüşümü bulunur.

$$x(n) = \propto_1 x_1(n) + \propto_2 x_2(n) + \cdots \propto_k x(n)$$

⇨ z-dönüşümleri genellikle iki polinomun oranı şeklinde ifade edilir.

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_M z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_N z^{-N}}$$

⇨ Eğer X(z)'nin kutupları 1.dereceden ise ve N=M ise, X(z) aşağıdaki gibi genişletilebilir.

$$X(z) = B_0 + \frac{C_1}{1 - p_1 z^{-1}} + \frac{C_2}{1 - p_2 z^{-1}} + \cdots + \frac{C_N}{1 - p_N z^{-1}}$$

Veya

$$X(z) = B_0 + \frac{C_1 . z}{z - p_1} + \frac{C_2 . z}{z - p_2} + \cdots + \frac{C_N . z}{z - p_N} \;-> (*)$$

*Burada C’ler kısmı kesir katsayılardır.

$M = N$ olduğu zaman $\rightarrow B_0 = \frac{b_M}{a_N}\ olur$

$M < N\ olduğu\ zaman\ ise\ ----> B_0 = 0\ olur$

$\Rightarrow$ Katsayılar şöyle hesaplanabilir:

Denklem (*) her iki tarafı $(z - p_k)\big|_{z = p_k}$ ile çarpılır ve $z = p_k$’de aşağıdaki gibi hesaplanır.   k=1, 2, 3,…

$$C_k = \frac{X(z)}{z}(z - p_k)\Big|_{z = p_k}$$

Örnek: Aşağıdaki fonksiyonun ters z-dönüşümünü bulunuz.

$$X(z) = \frac{z^{-1}}{1-0.25z^{-1}-0.375z^{-2}}$$

Çözüm:

X(z)'yi z^2/z^2 ile çarpalım.

$$X(z) = \frac{z^2}{z^2} * \frac{z^{-1}}{1-0.25z^{-1}-0.375z^{-2}}$$
$$= \frac{z}{(z-0.75)(z+0.5)}$$

X(z)'nin birinci dereceden kutupları var:

$z_1=0.75$ ve $z_2=-0.5$

Ayrıca, M<N olduğu için $B_0=0$ olur.
Kısmı kesir aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$X(z) = \frac{z}{(z-0.75)(z+0.5)} = \frac{C_1 z}{(z-0.75)} + \frac{C_2 z}{(z+0.5)}$$

Yukardaki denklemi z ile bölelim.

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z}{z(z-0.75)(z+0.5)}$$
$$= \frac{C_1}{(z-0.75)} + \frac{C_2}{(z+0.5)}$$

C_1'i bulmak için yukarıdaki denklemi $(z-0.75)$ ile çarparız ve z=0.75 yerine koyarız.

$$\frac{(z-0.75)X(z)}{z} = \frac{(z-0.75)}{(z-0.75)(z+0.5)}$$
$$= C_1 + \frac{C_2(z-0.75)}{(z+0.5)}$$

$$C_1 = \left.\frac{1}{(z+0.5)}\right|_{z\,=\,0.75} = \frac{1}{0.75+0.5} = \frac{1}{1.25} = \frac{4}{5}$$

C_2'yi bulmak için X(z)/z ‘in her iki tarafını (z+0.5) ile çarpıp, z=-0.5 yerine koyarak C_2'yi buluruz.

$$\frac{(z+0.5)X(z)}{z} = \frac{(z+0.5)}{(z-0.75)(z+0.5)}$$
$$= C_2 + \frac{C_1(z+0.5)}{(z-0.75)}$$

$$C_2 = \left.\frac{1}{(z-0.75)}\right|_{z\,=\,-0.5} = \frac{1}{-0.75-0.5} = \frac{1}{-1.25}$$
$$= -\frac{4}{5}$$

$$X(z) = \frac{z}{(z-0.75)(z+0.5)} = \frac{\frac{4}{5}z}{(z-0.75)} + \frac{\frac{-4}{5}z}{(z+0.5)}$$

$$\frac{\frac{4}{5}z}{(z-0.75)} \quad --\rightarrow ters\ z - dönüşümü\ \frac{4}{5}(0.75)^{\,n}$$

$$\frac{\frac{-4}{5}z}{(z+0.5)} \quad --\rightarrow ters\ z - dönüşümü - \frac{4}{5}(-0.5)^{\,n}$$

Her iki ters dönüşümünü toplarsak :

$$x(n) = \frac{4}{5}[(0.75)^{\,n} - (-0.5)^{\,n}] \qquad n > 0$$

Ters z dönüşümleri sayfa 391'deki Tablo 9.1'den faydalanarak bulunabilir.

$$\frac{1}{1-\propto z^{-1}} \quad <=> \ \propto^n u(n)$$

$$\frac{z}{z-\propto} \quad <=> \ \propto^n u(n)$$

Fark Denklemleri

Ayrık zamanlı sistem için aşağıdaki fark denklemi yazılabilir.

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N} a_k x(n-k) - \sum_{k=0}^{M} b_k y(n-k)$$

z-dönüşümün zaman kaydırma özelliğini kullanırsak

$$a_k x(n) <=> a_k X(z) \qquad ,$$
$$a_k x(n-k) <=> a_k z^{-k} X(z)$$

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} X(z) - \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} Y(z)$$

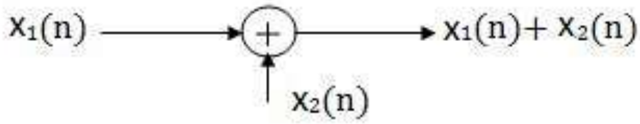
Sistemin transfer fonksiyonu aşağıdaki gibi bulunur.

$$Y(z)\left[1 + \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}\right] = \sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}$$

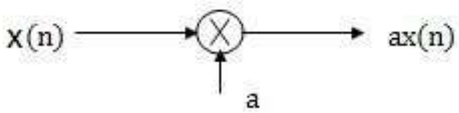
Ayrık Zamanlı Sistemlerin Blok Diyagram Gösterimi

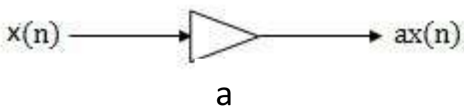
1) Toplama



Toplam işlemi hafızasızdır

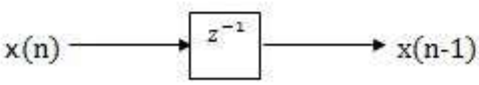
2) Çarpma :
Sinyal Çarpma





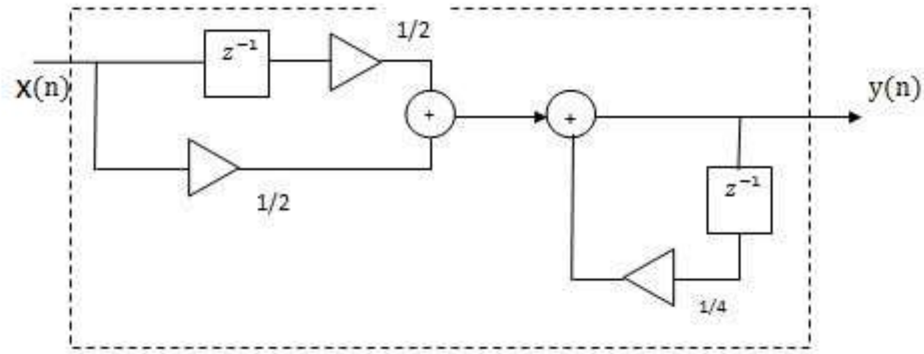
Çarpma işlemi hafızasızdır

3) Birim Gecikme



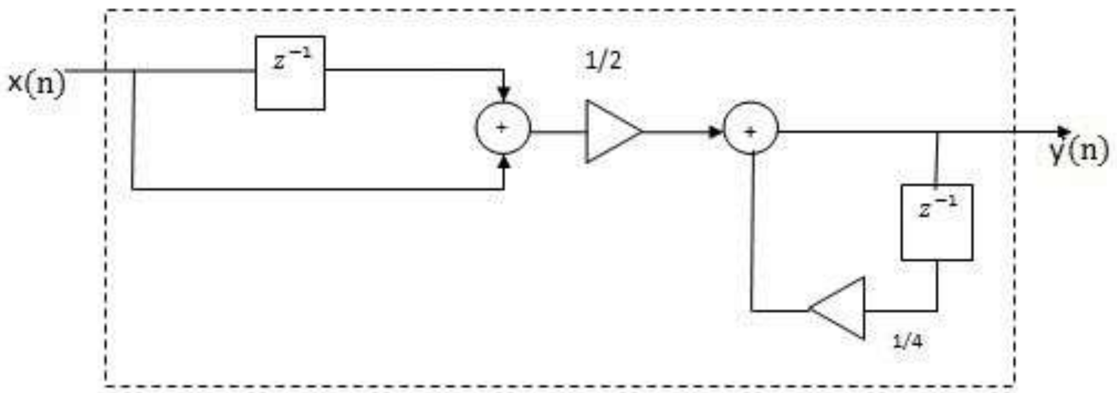
Birim Gecikme hafıza gerektirir

Örnek: $y(n) = \frac{1}{4}y(n-1) + \frac{1}{2}x(n) + \frac{1}{2}x(n-1)$ fark denkleminin blok diyagramını çiziniz.



Eğer fark denklemi aşağıdaki gibi yeniden yazılırsa

$$y(n) = \frac{1}{4}y(n-1) + \frac{1}{2}[x(n) + x(n-1)]$$

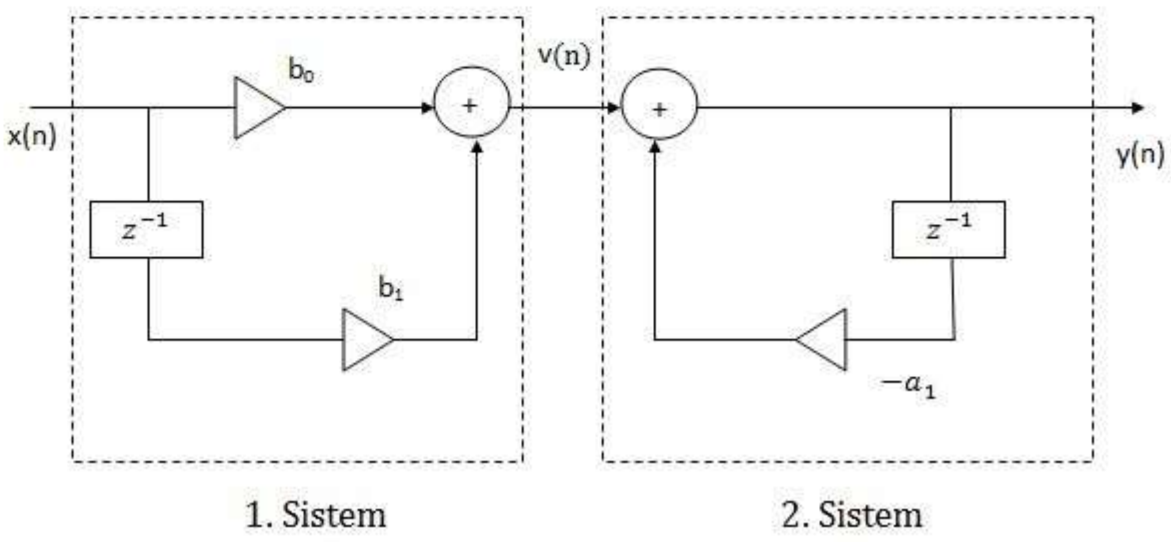


Doğrusal Zaman Değişimsiz (DZD) Ayrık Zamanlı Sistemlerin Gerçekleştirilmesi

Aşağıdaki fark denklemini ele alalım

$$y(n) = -a_1 y(n-1) + b_0 x(n) + b_1 x(n-1)$$

Direk Donanım olarak gerçekleştirme(Direct Form I)

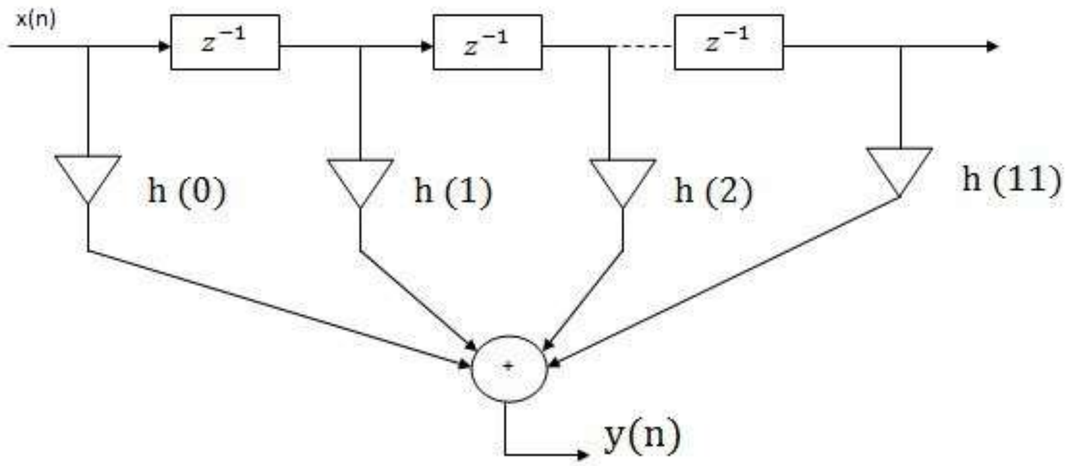


---

1. Sistem: $v(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) \;\; ---> \;\; yinelemesiz\ sistem$

2. Sistem: $y(n) = -a_1 y(n-1) + v(n) \;\; ---> \;\; yinelemeli\ sistem(recursive)$

Örnek: $H(z) = \sum_{k=0}^{11} h(k) z^{-k}$ transfer fonksiyonunun donanımsal olarak gerçekleşimini çiziniz.



$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{k=0}^{11} h(k) z^{-k} \quad =>$$

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{11} h(k) z^{-k} X(z)$$

Ters z-dönüşümünü bulursak

$$y(n) = h(0)x(n) + h(1)x(n-1) + h(2)x(n-2) + \cdots + h(11)x(n-11)$$

Bu donamnımı gerçekleştirmek için:

12 adet çarpma devresine

11 adet toplama devresine

23 adet (katsayılar+veri) hafızaya ihtiyaç vardır