Bölüm 3
Enerji, Güç, Evrişim(Katlama), Sistemler

- Sinyalin enerjisinin ve gücünün bilinmesi iletişimde önemli bir husustur.
- Birçok performans kıstası alıcıdaki sinyal gücünün gürültü gücüne oranı temel alınarak yapılır.
- Enerji, bir sinyalin belli bir zaman aralığında dağıtmış olduğu toplam güçtür.

Sinyallerde Enerji ve Güç (Sürekli Zamanlı Sinyaller)

Anlık Güç: x(t) sürekli zamanlı sinyalinin anlık gücü $p(t) = x^2(t)$ olarak hesaplanır.

Toplam Enerji: Anlık gücü bilinen sinyalin toplam enerjisi aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$E_x = \lim_{\tau \to \infty} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} p(t)dt$$

Ortalama Güç: Toplam enerjisi bilinen bir sinyalin ortalama gücü aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$P = \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} p(t)dt$$

- ❖ Periyodik bir sinyal için ortalama güç şu şekilde hesaplanır.

$$P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t)dt$$

Örnek: $x(t) = u(t)$ birim adım sinyalinin,

a. Anlık gücünü

b. Ortalama gücünü

c. Toplam enerjisini bulunuz.

Çözüm:

a. $p(t) = x^2(t) = u^2(t) = u(t)u(t) = u(t)$

b. $P = \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} p(t)dt$

$$= \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} u(t)dt = \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} \int_{0}^{\tau/2} u(t)dt$$

$$= \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} \left(t \Big|_0^{\frac{\tau}{2}} \right) = \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} \left(\frac{\tau}{2} - 0 \right) = \lim_{\tau\to\infty} \frac{\tau/2}{\tau} = \frac{1}{2}$$

c.

$$Ex = \lim_{\tau\to\infty} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} p(t)dt = \lim_{\tau\to\infty} \int_0^{\frac{\tau}{2}} u(t)dt$$

$$= \lim_{\tau\to\infty} \left(t \Big|_0^{\frac{\tau}{2}} \right) = \lim_{\tau\to\infty} \frac{\tau}{2} = \infty$$

<u>Örnek:</u>

$$x(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t \le 2 \\ 3\text{-}t, & 2 \le t \le 4 \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

Yukarıda verilen x(t) sinyalinin:

a) Anlık gücünü, b) Ortalama gücünü ve

c) Toplam enerjisini hesaplayınız.

a. Anlık güç

$$p(t) = x^2(t) = \begin{cases} t^2, & 0 \leq t \leq 2 \\ (3-t)^2, & 2 \leq t \leq 4 \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

b. Ortalama güç

$$P = \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} p(t)dt$$

$$= \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} \left[\int_0^2 t^2 dt + \int_2^4 (3-t)^2 dt + \int 0 dt \right]$$

$$= \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} [\frac{t^3}{3} \Big|_0^2 + 9t \Big|_2^4 + (\frac{-6t^2}{2}) \Big|_2^4 + \frac{t^3}{3} \Big|_2^4]$$

$$= \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} [\frac{8}{3} + (36 - 18 + (-48 + 12) + \frac{1}{3}(4^3 - 2^3)$$

$$= \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} \left[\frac{8}{3} + \frac{2}{3}\right] = 0$$

$$\boldsymbol{c}.\, E_x = \lim_{\tau \to \infty} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} p(t)\, dt = \int_0^2 t^2 dt + \int_2^4 (3-t)^2 dt$$

$$= \frac{t^3}{3}\Big|_0^2 + \left(-\frac{(3-t)^3}{3}\right)\Big|_2^4 = \frac{8}{3} + \frac{2}{3} = \frac{10}{3}$$

__Örnek:__ $x(t) = A\sin(\frac{2\pi}{T}t)$ sinyalinin **__enerjisini__** ve **__ortalama gücünü__** hesaplayınız.

__Çözüm:__

$$x^2(t) = A^2 \sin^2(\frac{2\pi}{T}t)$$

$$E_x = \lim_{T \to \infty} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t)dt = x^2(t)$$

Sinyalin enerjisi $x^2(t)$ fonksiyonunun altındaki alanı bulmak demektir = Integral almaya eşdeğer

$x^2(t)$ Her zaman pozitif değerlerden oluşacaği için, bu alanın değeri sonsuzdur. $\Longrightarrow$ $E_x = \infty$

$$P = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x^2(t)dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} A^2 sin^2\left(\frac{2\pi}{T}t\right)dt$$

$sin^2 x = \frac{1-cos2x}{2}$ özelliğini kullanarak

$$P = \frac{A^2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \frac{1-\cos(\frac{4\pi}{T}t)}{2}dt$$

$$= \frac{A^2}{2T}\int_{-T/2}^{T/2} [1-\cos\left(\frac{4\pi}{T}t\right)]\,dt$$

$$= \frac{A^2}{2T}\left[\int_{-T/2}^{T/2} dt - \int_{-T/2}^{T/2} \cos\left(\frac{4\pi}{T}t\right)dt\right]$$

$$= \frac{A^2}{2T}\left[t\,\Big|_{-\mathrm{T}/2}^{T/2} - \frac{1}{\frac{4\pi}{T}}\sin(\frac{4\pi}{T}t)\,\Big|_{-T/2}^{\mathrm{T}/2}\right]$$

$$= \frac{A^2}{2T}[\frac{\mathrm{T}}{2} + \frac{\mathrm{T}}{2} - \sin\left(\frac{4\pi(\frac{\mathrm{T}}{2})}{\mathrm{T}}\right) + \sin(\frac{4\pi(\frac{-\mathrm{T}}{2})}{\mathrm{T}})] = \frac{\mathrm{A}^2}{2}$$

Sinüs ifadeleri sıfırdır.

Ayrık Zamanlı Sinyallerin Enerji ve Güçleri

Anlık Güç: $p(n) = x^2(n)$

Toplam Enerji:

$$\mathrm{E_x} = \sum_{\mathrm{n}=-\infty}^{\infty} x^2(n)$$

Sürekli zamanlı sinyaller için $\mathrm{E_x}=\mathrm{lim}\int x^2(t)dt$

Ayrık zamanda integral yerine toplama yapılıyor!

Ortalama Güç:

$$P = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^{M} x^2(n)$$

Periyodu N olan bir sinyalin ortalama gücü şu şekilde bulunur:

$$P = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x^2(n)$$

Örnek: $x(n) = (-1)^n$ sinyalinin anlık gücünü, ortalama gücünü ve enerjisini bulunuz.

Çözüm:

Anlık güç: $p(n) = x^2(n) = [(-1)^n]^2 = (-1)^{2n} = 1$

n=0,1,2,3,...... değerleri için

Ortalama Güç:

$$P = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^{M} 1 = \lim_{M\to\infty} \frac{2M+1}{2M+1} = 1$$

Enerji:

$$E_{x=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 1 = \infty$$

Evrişim (Convolutin)
Sürekli Zamanlı Sinyallerin Evrişimi

$$h(t) = f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z)g(t-z)dz$$

Evrişim işlemi

Sürekli zamanlı sinyallerin evrişimini işlemeyeceğiz.

Ayrık Zamanlı Sinyallerin Evrişimi

$$h(n) = f(n) * g(n) = \sum_{-\infty}^{\infty} f(k)g(n-k)$$

Örnek: $f(n) = \{3, -2, 4\}$ ve $g(n) = \{4, 2, -1\}$

n=0 n=0

Fonksiyonlarının matematiksel olarak evrişimini bulunuz.

Çözüm:

$$h(n) = \sum_{-\infty}^{\infty} f(k)g(n-k)$$

$\underline{n = -1 \;\; için}$:

$$h(-1) = f(-1)g(0) + f(0)g(-1) + f(1)g(-2) + f(2)g(-3) =$$

$$(3).4 + (-2).0 + (4).0 + (0).0 = 12$$

$\underline{n = 0 \;\; için}$:

$$h(0) = f(-1)g(1) + f(0)g(0) + f(1)g(-1) + f(2)g(-2) =$$

$$(3).2 + (-2).4 + (4).0 + (0).0 = -2$$

$\underline{n = 1 \;\; için}$:

$$h(1) = f(-1)g(2) + f(0)g(1) + f(1)g(0) + f(2)g(-1) =$$

$$(3).(-1) + (-2).2 + (4).4 + 0 = 9$$

$\underline{n = 2 \;\; için}$:

$$h(2) = f(-1)g(3) + f(0)g(2) + f(1)g(1) + f(2)g(0) =$$

$$(3).0 + (-2).(-1) + (4).2 + 0 = 10$$

$\underline{n = 3 \quad için}$:

$$h(3) = f(-1)g(4) + f(0)g(3) + f(1)g(2) + f(2)g(1) =$$

$$0 + 0 + (4).(-1) + 0 = -4$$

$\underline{n = 4 \quad için}$:

$$h(4) = f(-1)g(5) + f(0)g(4) + f(1)g(3) + f(2)g(2) + f(3)g(1) =$$

$$0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

Method 2: Kaydırma Yöntemi

Örnek: $f(n) = \{3, -2, 4\}$ ve $g(n) = \{4, 2, -1\}$

↑ n=0 ↑ n=0

n:	-1	0	1
f(n):	3	-2	4

-1 2 4 <---------------------------- g(n)'nin katlanmış şekli

12 ----------> h(-1)=12

	3	-2	4
-1	2	4	
	6	-8	

$\longrightarrow h(0) = 6 - 8 = -2$

3	-2	4
-1	2	4
-3	-4	16

$\longrightarrow h(1) = 9$

-3	-2	4	
	-1	2	4
	2	8	

$\longrightarrow h(2) = 10$

3	-2	4		
		-1	2	4
		-4		

$\longrightarrow h(3) = -4$

h(n)={12, -2, 9, 10, -4}

↑ n=0

Özellik:

f(n) ve g(n) fonksiyonlarının vektörel uzunlukları (fonksiyonların tanımlı olduğu zaman anlarının sayısı) sırasıyla N ve M olsun. Bu fonsiyonların evrişiminde elde edilen h(n) fonksiyonunun vektörel uzunluğu N+M-1 dir.

Örnek: $h(n) = f(n) * g(n)$ sayı dizisinin uzunluğu nedir?

f(n)={3.5, -2.1, 4.0, 2.4, 5.6, 1.2}

$\uparrow$ n=0

g(n)= {2, -1, 3}

$\uparrow$ n=0

Çözüm:

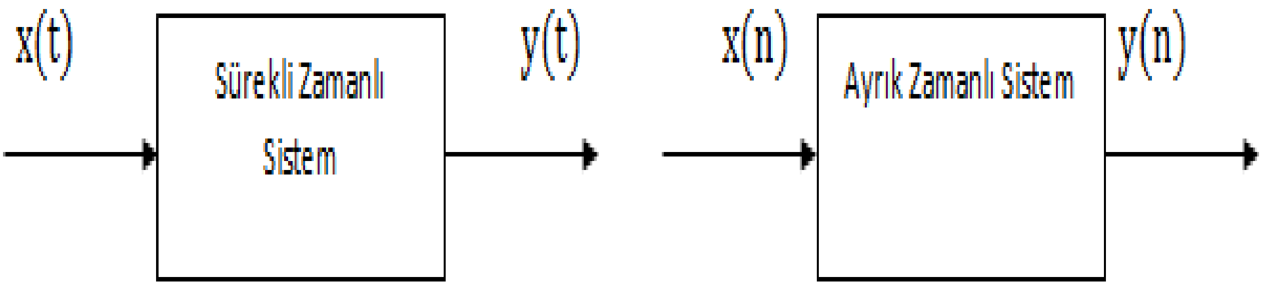
f(n)'in uzunluğu → 6

g(n)'in uzunluğu → 3

⇒ h(n)'in uzunluğu 6+3-1=8'dir

Sistemler ve Özellikleri

Girişindeki sinyal veya sinyalleri alan ve onları işleyerek çıkısında başka sinyal ve sinyaller üreten elektronik devre ya da herhangi bir üniteye **Sistem** denir.



Matematiksel Gösterimi

- x(t) giriş, y(t) çıkış sinyalini gösterdiğini kabul edelim.
- Çıkış ve giriş arasındaki ilişkiyi şu şekilde gösteririz.

$$y(t) = H\{x(t)\}$$

- Burada $H\{.\}$ sistem operatörünü temsil etmektedir.

Sistemlerin Özellikleri

1) Nedensellik, Gerçeklenebilirlik (Casuality)

Herhangi bir andaki çıkış sinyali, o andaki ya da geçmişteki giriş verilerine bağlı olan sistemler **nedenseldir**. Eğer sistem çıkışı gelecek zamandaki giriş değerlerine bağlı ise sistem **nedensel değildir**.

Örnek:

Aşağıdaki denklem bir sistemin çıktısıdır. Sistemin nedensel olup olmadığını bulunuz.

$$y(n) = x(n) + 0.5x(n-2) + x^2(n-3)$$

Çözüm:

Bu denklemden de görüldüğü gibi y(n), şimdiki giriş x(n) ve geçmiş zaman girişlerine ($x(n-2)\ ve\ x(n-3)$) bağlıdır. Dolaysıyla, bu sistem nedenseldir.

Örnek: Bir sürekli zamanlı sistemin çıkışı ile girişi arasındaki ilişki aşağıdaki gibi ifade edilmiştir.

$$y(t) = x(t+0.5) + x(t-2.3) - x^3(t-3)$$

Sistemin nedensel olup olmadığını bulunuz.

<u>Çözüm:</u> Sistemin çıkışı y(t), gelecek zaman girişi x(t+0.5)'e ve geçmiş zaman girişlerine bağlıdır. Ancak, gelecek zamana bağımlılık, bu sistemin <u>nedensel</u> <u>olmadığını</u> gösterir.

2. Hafıza(Memory)

Bir sistemin çıkışı sadece o andaki girişe bağlı olarak değişiyorsa, sistemin **<u>hafızası yoktur</u>**. Fakat, sistemin çıkışı geçmiş ve gelecek girişlere bağlı olarak değişiyorsa, sistemin **<u>hafızası vardır</u>**.

<u>Örnek:</u> $y(n) = x(n) + x^3(n)$

Yukardaki denklem ile ifade edilen sistemin hafızası olup olmadığını bulunuz.

<u>Çözüm:</u> Sistemin n anındaki çıkışı y(n), sadece n anındaki girişe bağlıdır. Dolayısıyla, bu sistemin <u>hafızası yoktur</u>.

<u>Örnek:</u> $y(t) = x(t-1) + x^2(t)$

Sistemin hafızası olup olmadığını bulunuz.

Çözüm: y(t), hem t anındaki hem de t-1 anındaki girişlere bağlı olduğu için, bu sistemin hafızası vardır.

3. Doğrusallık (Linearity)

Bir sisteme iki değişik giriş uygulayalım ve bunları x_1 ve x_2 olarak gösterelim. Sistemin bu girişler için çıkışı y_1 ve y_2 olsun. Sistemin doğrusal olabilmesi için $k_1x_1 + k_2x_2$ girişi için çıkışının $k_1y_1 + k_2y_2$ olması gerekir.

Örnek: $y(n) = x^2(n-1)$ sistemi doğrusal mıdır?

Çözüm: Sistemin çıkışı girişin karesi ile bağlantılı olduğu için direk olarak doğrusal değildir diyebiliriz. Fakat yine de, doğrusallık tanımını uygulayarak matematiksel olarak doğrusal olmadığını göstermemiz gerekir.

$$y_1 = x_1^2(n-1) \qquad , \qquad y_2 = x_2^2(n-1)$$

Doğrusal olabilmesi için $(\mathrm{k}_1 = \mathrm{k}_2 = 1)$

$\mathrm{k}_1\mathrm{x}_1(\mathrm{n}) + \mathrm{k}_2\mathrm{x}_2(\mathrm{n})$ girişi için

$\Longrightarrow$ Çıkış $y_1(n) + y_2(n)$ olması gerekir.

$\mathrm{x}_1(\mathrm{n}) + \mathrm{x}_2(\mathrm{n}) \Longrightarrow y(n) = [\mathrm{x}_1(\mathrm{n}-1) + \mathrm{x}_2(\mathrm{n}-1)]^2$

$= x_1^2(n-1) \ + 2x_1(n-1)x_2(n-1) + x_2^2(n-1)$

$\Longrightarrow \ y_1(n) + y_2(n) =$

$x_1^2(n-1) + x_2^2(n-1)$

$\neq x_1^2(n-1) + 2x_1(n-1)x_2(n-1) + x_2^2(n-1)$

Dolayısıyla, bu sistem **doğrusal değildir**.

Örnek: $y(t) = x(t)x(t-1)$ sistemi doğrusal mıdır?

Çözüm:

$y_1 = x_1(t)x_1(t-1) \quad , \quad y_2 = x_2(t)x_2(t-1)$

$x_1(t) + x_2(t)$

$\Longrightarrow \ y(t) = [x_1(t) + x_2(t)][x_1(t-1) + x_2(t-1)]$

$= x_1(t)x_1(t-1) + x_1(t)x_2(t-1)$
$\quad + x_2(t)x_1(t-1) + x_2(t)x_2(t-1)$

$\Longrightarrow \ y(t) \neq y_1(t) + y_2(t) =$
$x_1(t)x_1(t-1) + x_2(t)x_2(t-1)$

Dolayısıyla, bu sistem **doğrusal değildir**.

4. Zaman Değişimsiz(Time Invariance)

Bir sistemin zaman ekseninde kaydırılan girişleri ayni miktarda zaman ekseninde kaymış çıkış oluşturuyorsa, bu sistem **zaman değişimsiz bir sistemdir**.

Örnek: $y(t) = \frac{x(t)}{R(t)}$ sistemi zaman değişimsiz midir?

Çözüm: Zaman değişimsiz sistem olabilmesi için $x(t-t_0)$'nin üreltiği çıkış $y(t-t_0) = \frac{x(t-t_0)}{R(t-t_0)}$ olmalıdır. Halbuki,

$\frac{x(t-t_0)}{R(t)} \neq y(t-t_0) \Longrightarrow$ Bu sistem **zamana bağımlıdır**.

$t - t_0$ olmaz çünkü R giriş değildir

Örnek: $y(n) = x(n) - x(n-1)$ sistemi zaman değişimsiz midir?

Girişten dolayı

$\Rightarrow \quad y(n-n_0) = x(n-n_0) - x(n-1-n_0)$

$\Rightarrow \quad y(n-n_0) = x(n-n_0) - x(n-1-n_0)$

Çıkışın n_0 kadar kaydırılmasından dolayı

$\Rightarrow$ Heriki çıkış birbirine eşit olduğu için bu sistem **zaman değişimsizdir**.

Örnek: Aşağıdaki sistemin zaman değişimsiz olup olmadığını bulunuz.

$$y(n) = nx(n)$$

Çözüm:

$y(n-n_0)$=n $x(n-n_0)$

$y(n-n_0)$=$(n-n_0)x(n-n_0)$

⇨ Çıkışlar eşit olmadığı için bu sistem **zamana bağımlıdır.**

Örnek: $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$ sisteminin zaman değişimsiz olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $x(t-t_0)$ girişi için sistem çıkışı

$$\Rightarrow \quad y_1(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau - t_0)\, d\tau$$

Sistemin zaman değişimsiz olması için

$$y_1(t) = y_1(t-t_0)$$

⇨ Çıkışı t_0 kadar kaydıralım

$$\Rightarrow \quad y(t-t_0) = \int_{-\infty}^{t-t_0} x(\tau)d\tau$$

$\tau' = \tau + t_0$ yaparsak ⇨ $y(t-t_0)$=$\int_{-\infty}^{t_0} x(\tau')d\tau'$

⇨ $y_1(t) = y(t - t_0)$ sağlandığı için sistem **zaman değişimsizdir**.

Örnek: $y(n) = x(n)\cos(w_0 n)$ sisteminin zaman değişimsiz olup olmadığını bulunuz.

Çözüm:

$x(n - n_0)$ girişi için cıkış:

$$\Longrightarrow \quad y_1(n) = x(n - n_0)\cos(w_0 n)$$

⇨ Şimdi bize verilen çıkışı n_0 kadar kaydıralım

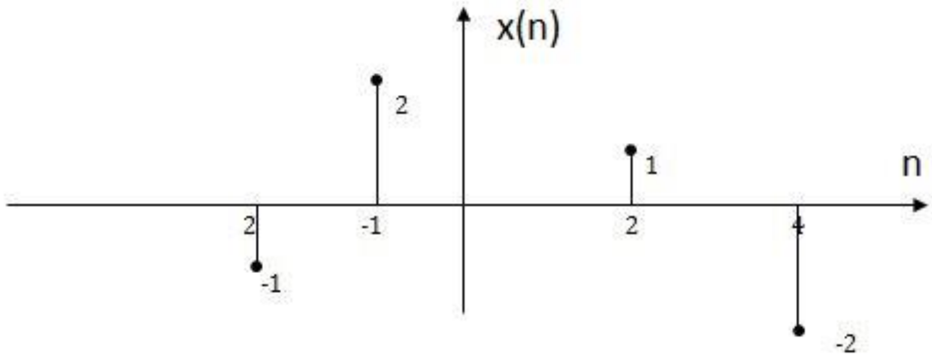
$$y_2(n) = x(n - n_0)\cos(w_0 n - n_0)$$

⇨ $y_1(n) \neq y_2(n)$'dan dolayı bu sistem zamana bağımlıdır.

NOT: Evrişim özelliği $[y(n) = x(n) * h(n)]$ zaman değişimsiz ve doğrusal olan sistemler için geçerlidir.

Doğrusal ve zaman Değişimsiz Sistemlerin Zaman Alanında Gösterimi

Aşağıdaki sinyali ele alalım



x(n) sinyali dürtü fanksiyonları türünden şöyle yazılır:

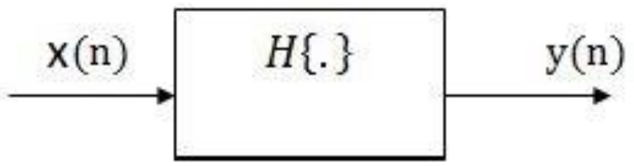
$$x(n) = -\delta(n+2) + 2\delta(n+1) + \delta(n-2)$$
$$-2\delta(n-4)$$

Yukarıdaki denklemi genellersek

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)$$

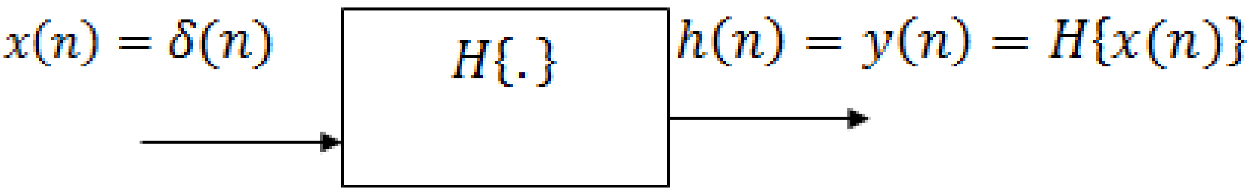
Yani $x(n) = x(n) * \delta(n)$ olur.

Şimdi doğrusal ve zaman değişimsiz bir sistemi ele alalım.



Çıkış ile giriş arasındaki ilişki $y(n) = H\{x(n)\}$ şeklinde gösterilir.

$\Rightarrow$ $x(n) = \delta(n)$ olsun. Bu özel giriş için, sistem çıkısını *h(n)* ile gösterelim.



x(n) yerine $x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\,\delta(n-k)$ yazarsak

$\Rightarrow$ $y(n) = H\{\sum_{-\infty}^{\infty} x(k)\,\delta(n-k)\}$ elde ederiz.

Burada $H\{.\}$ operatörünü toplam ifadesinin içine çekersek

$$y(n) = \sum_{-\infty}^{\infty} x(k) H\{\delta(n-k)\} \text{ olur.}$$

Sistemimiz zaman değişimsiz olduğu için
$x(n) = \delta(n) \Rightarrow y(n) = h(n)$

$x(n) = \delta(n-k)$ için çıkış $y(n) = h(n-k)$ olmalıdır.

Yani, $h(n) = H\{\delta(n)\}$ ise

$h(n-k) = H\{\delta(n-k)\}$ dir.

$$\Rightarrow \quad y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

Eğer sistemimizin dürtü girişi için çıkışını biliyorsak, herhangi rastgele bir giriş için çıkışı bu eşitliği kullanarak bulabiliriz

.

Örnek: Sistem girişi ve çıkışı arasındaki bağlantı $y(n) = x(n) + 0.5x(n-2)$ ile verilen bir sistemin dürtü yanıtını bulunuz.

Çözüm: Bir sistemin dürtü yanıtı, giriş verisi dürtü iken sistemin verdiği çıkıştır. Yani, $x(n) = \delta(n)$ için sistemin çıkışını bulacağız. Buna göre sistemin dürtü yanıtı aşağıdaki gibi olur.

$$h(n) = \delta(n) + 0.5\,\delta(n-2)$$

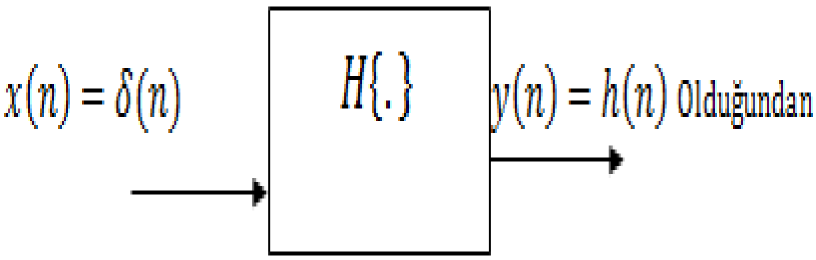
veya

$$h(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0.5, & n = 2 \\ 0\,, & diğer \end{cases}$$

Örnek: Doğrusal ve zaman değişimsiz bir sistemin aşağıdaki giriş için ürettiği çıkışı *h(n)* türünden yazınız.

$$x(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 2, & n = 3 \\ -0.5, & n = 4 \end{cases}$$

<u>**Çözüm:**</u>



$x(n) = \delta(n) + 2\delta(n-3) - 0.5\delta(n-4)$ için sırasıyla:

$$\left.\begin{array}{lcl} \delta(n) & \longrightarrow & h(n) \\ \delta(n-3) & \longrightarrow & h(n-3) \\ \delta(n-4) & \longrightarrow & h(n-4) \end{array}\right\}$$

$$\Downarrow$$

$$y(n) = h(n) + 2h(n-3) - 0.5h(n-4)$$

Örnek: Doğrusal ve zaman değişimsiz bir sistemin dürtü yanıtı $h(n) = \delta(n) - \delta(n-4)$ olsun. Sistemin $x(n) = u(n)$ girişi için sistemin çıkışını bulunuz.

Çözüm: Sistemin çıkışı $\Rightarrow$ $y(n) = h(n) * x(n)$

$y(n) = [\delta(n) - \delta(n-4)\,] * u(n)$

$= \delta(n) * u(n) - \delta(n-4) * u(n)$

$= u(n) - u(n-4)$

$\delta(n) * x(n) = x(n)$

$x(n) * \delta(n - n_0)$
$= x(n - n_0)$

Örnek: Doğrusal ve zaman değişimsiz bir sistemin dürtü yanıtı $h(n) = \delta(n) + 0.5\delta(n-1)$ ise, sistemin

$x(n) = \begin{cases} 2, & n = 0 \\ 4, & n = 1 \\ 0, & diğer \end{cases}$ için çıkışını bulunuz.

Çözüm 1: $y(n) = h(n) * x(n)$

$x(n) = 2\delta(n) + 4\delta(n-1)$

$y(n) = [\delta(n) + 0.5\delta(n-1)]*[2\delta(n) + 4\delta(n-1)]$

$= \delta(n) * 2\delta(n) + 4\delta(n) * \delta(n-1) +$

$\delta(n-1) * \delta(n) + 2\delta(n-1) * \delta(n-1)$

$= 2\delta(n) + 4\delta(n-1) + \delta(n-1) + 2\delta(n-2)$

$= 2\delta(n) + 5\delta(n-1) + 2\delta(n-2)$

$$\boxed{\begin{array}{l} \delta(n) * \delta(n) = \delta(n) \\ \delta(n) * \delta(n-1) = \delta(n-1) \\ \delta(n-1) * \delta(n-2) = \delta(n-2) \end{array}}$$

Çözüm2: Verilen giriş için sistemin çıkışı

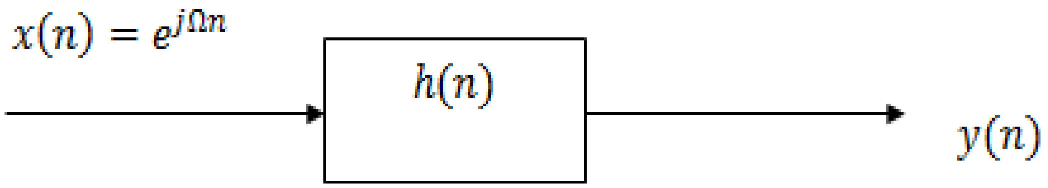
$$y(n) = 2h(n) + 4h(n-1) \text{ dir.}$$

$$y(n) = 2[\delta(n) + 0.5\delta(n-1)] \\ + 4[\delta(n-1) + 0.5\delta(n-2)]$$

$= 2\delta(n) + \delta(n-1) + 4\delta(n-1) + 2\delta(n-2)$

$= 2\delta(n) + 5\delta(n-1) + 2\delta(n-2)$

Doğrusal ve Zaman Değişimsiz Bir Sistemin Üstsel Fonksiyona Yanıtı, Dönüşüm Fonksiyonu



Bu durumda sistemin çıkışı

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\Omega n} = e^{j\Omega n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\, e^{-j\Omega k}$$

Burada $\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\Omega k}$, $h(n)$ dürtü yanıtının Fourier dönüşümüdür ve $H(\Omega)$ ile gösterilir.

$$\Longrightarrow \quad y(n) = \underbrace{e^{j\Omega n}}_{x(n)} H(\Omega)$$

Eğer $x(n) = \cos(\Omega n + \Psi)$ ise $y(n)$ ne olur?

$$x(n) = \cos(\Omega n + \Psi) = \frac{e^{j(\Omega n+\Psi)} + e^{-j(\Omega n+\Psi)}}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{j\Omega n}.e^{j\Psi} + e^{-j\Omega n}.e^{-j\Omega}\right]$$

$$y(n) = \frac{1}{2}\left[H(\Omega)e^{j\Omega n}.e^{j\Psi} + H^{*}(\Omega)e^{-j\Omega n}.e^{-j\Omega}\right]$$

$H^{*}(\Omega), H(\Omega)$ ‘nin karmaşık eşleniğidir (Complex Conjugate)

$$H(\Omega) = |H(\Omega)|\lfloor H(\Omega) = |H(\Omega)|e^{\lfloor H(\Omega)}$$

$$y(n) = \frac{1}{2}\left[|H(\Omega)|e^{\lfloor H(\Omega)}.e^{j\Omega n}.e^{j\Psi} + |H(\Omega)|e^{-\lfloor H(\Omega)}.e^{-j\Omega n}.e^{-j\Psi}\right]$$

Bu sonucu yeniden düzenlersek

$$y(n) = |H(\Omega)|\cos(\lfloor H(\Omega) + \Omega n + \Psi)$$

<u>**Örnek:**</u> Dürtü yanıtı $h(n) = \delta(n-1) + \delta(n+1)$ olan sistemin $x(n) = \cos(\Omega n + \frac{\pi}{3})$ girişi için çıkışını bulunuz.

<u>**Çözüm:**</u> $y(n) = |H(\Omega)|\cos(\lfloor H(\Omega) + \Omega n + \Psi)$ ifadesini bu probleme uygulayacak olursak:

$$H(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\Omega k}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\delta(k-1) + \delta(k+1)]\, e^{-j\Omega k}$$

$$= e^{-j\Omega} + e^{j\Omega} = 2\cos(\Omega)$$

Burada $\lfloor H(\Omega) = 0 \longrightarrow \quad tan^{-1}\left(\frac{Sanal}{Gerçek}\right)$

Sanal kısım sıfır olduğu için

$$y(n) = 2\cos(\Omega)\cos(\Omega n + \frac{\pi}{3})$$