Bölüm 5
Sürekli Zamanlı Sinyallerin Fourier Analizi

- 1768 yılında doğan Fransız bilim adamı Fourier, trigonometrik seriler üzerine çalışmış ve periyodik sinyallerin harmoniksel olarak bağlantılı sinüzoidal sinyallerin toplamı şeklinde yazılabileceğini bulmuştur.
- Daha sonra, periyodik olmayan sinyallerin birbiri ile harmonik olmayan sinüzoidal sinyallerin integrali şeklinde yazılacağını göstermiştir.
- Fourier dönüşüm formülü sinyal işlemenin en önemli formülü olarak kabul edilmektedir.

Sürekli Zamanlı Periyodik Sinyallerin Fourier Seri Gösterimleri

- Herhangi bir sürekli zamanlı matematiksel fonksiyonu $f(t)$ eğer $f(t) = f(t + kT)$ özelliğini sağlıyorsa periyodik bir fonksiyondur.

Örnek: $f(t) = \cos(200\pi t)$ fonksiyonunun periyodunu bulunuz.

Çözüm:

$$w = 2\pi f = 200\pi \Longrightarrow f = \frac{200\pi}{2\pi} = 100 \Longrightarrow T = \frac{1}{100}$$

Örnek: $f(t) = \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + \sin(\frac{\pi}{7}t)$ fonksiyonunun periyodunu bulunuz.

Çözüm:

Kosinüs:

$$w = 2\pi f = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow f = \frac{\pi/2}{2\pi} = \frac{\pi}{4\pi} = \frac{1}{4} \Longrightarrow T = 4$$

Sinüs:

$$w = 2\pi f = \frac{\pi}{7} \Longrightarrow f = \frac{\pi/7}{2\pi} = \frac{\pi}{14\pi} = \frac{1}{14} \Longrightarrow T = 14$$

Buna göre $f(t)$ fonksiyonunun periyodu 14 ve 4 'ün en küçük ortak katı olan 28'dir.

Teorem:

Periyodik bir fonksiyonun $[f(t) = f(t + kT)]$ Fourier seri açılımı aşağıdaki gibidir.

$$f(t) = A(0) + \sum_{k=1}^{\infty} A(k)\cos\left(k\frac{2\pi}{T}t\right) + \sum_{k=1}^{\infty} B(k)\sin(k\frac{2\pi}{T}t)$$

Burada $A(0), A(k)$ ve $B(k)$ fonksiyonun Fourier seri açılımı katsayıları olarak isimlendirilir ve aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$A(0) = \frac{1}{T}\int_T f(t)dt$$

$$A(k) = \frac{2}{T}\int_T f(t)\cos\left(k\frac{2\pi}{T}t\right)dt$$

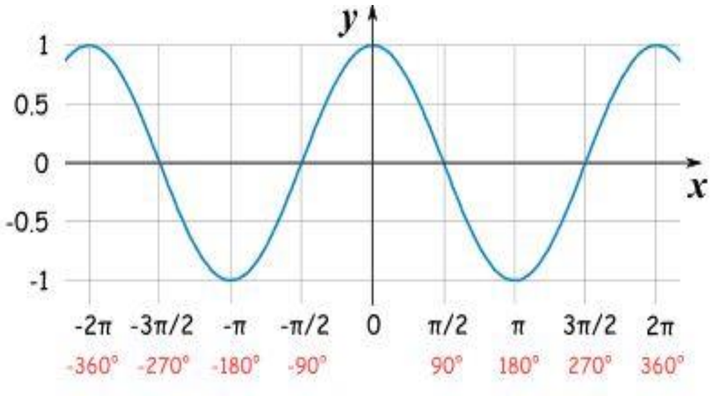
$$B(k) = \frac{2}{T}\int_T f(t)\sin(k\frac{2\pi}{T}t)dt$$

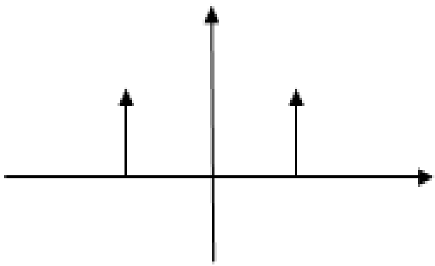
- Fourier seri açılımı tek ve çift fonksiyonlar için daha sade bir biçimde yazılabilir.

Çift Fonksiyon

$f(t)$ fonksiyonu $f(t) = f(-t)$ özelliğini sağlıyor ise çift fonksiyondur.

Örnek:

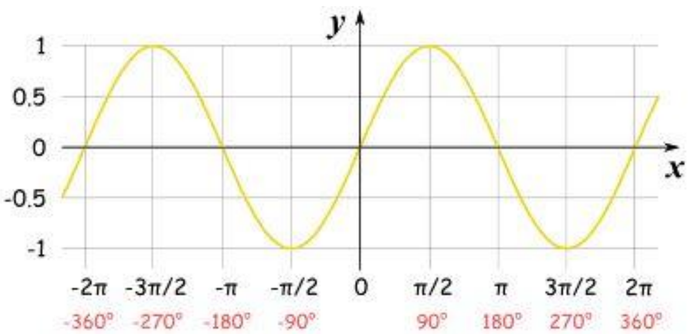


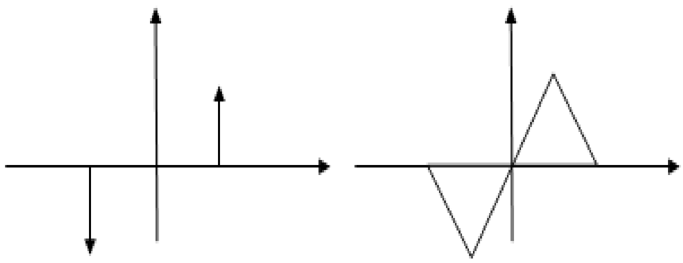


Tek Fonksiyon

$f(t)$ fonksiyonu $f(-t) = -f(t)$ özelliğini sağlıyor ise tek fonksiyondur.

Örnek :





- Herhangi bir fonksiyon tek yada çift olabileceği gibi, bu özelliklerden hiç birine de sahip olmayabilir.

- Herhangi bir rastgele fonksiyonu bir tek ve bir çift fonksiyonun toplamı şeklinde yazmak mümkündür.

$$f(t) = g(t) + k(t)$$

$$\begin{cases} f(t): herhangi\ bir\ fonksiyon \\ g(t): çift\ bir\ fonksiyon \\ k(t): Tek\ bir\ fonksiyon \end{cases}$$

- $g(t)$ ve $k(t)$ fonksiyonları $f(t)$ fonksiyonu türünden şöyle yazılır.

$$g(t) = \frac{f(t) + f(-t)}{2} \quad , \quad k(t) = \frac{f(t) - f(-t)}{2}$$

- Çift fonksiyonlar için $k(t) = 0$, tek fonksiyonlar için $g(t) = 0$ olmaktadır.

Çift Fonksiyonun Fourier Seri Gösterimi

$$f(t) = A(0) + \sum_{k=1}^{\infty} A(k)\cos\left(k\frac{2\pi}{T}t\right)$$

$$A(0) = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)dt$$

$$A(k) = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos\left(k\frac{2\pi}{T}t\right)dt$$

$$B(k) = 0, k = 1,2,3, \ldots$$

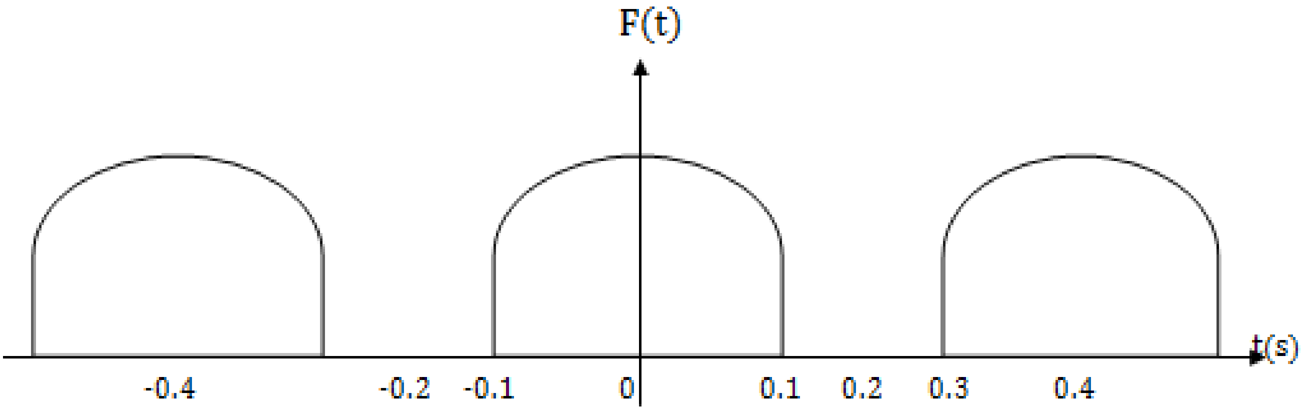
Tek Fonksiyonun Fourier Seri Gösterimi

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} B(k)\sin(k\frac{2\pi}{T}t)$$

$$A(0) \neq 0, A(k) = 0, k = 1,2,3, \ldots$$

$$B(k) = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\sin(k\frac{2\pi}{T}t)dt$$

Örnek: Aşağıdaki dalga şeklinin Fourier seri gösterimini bulunuz.



Çözüm: Dalga şekli matematiksel olarak şu şekilde yazılır

$$f(t) = \begin{cases} V_m \cos(5\pi t)\ , & 0 \leq t \leq 0.1 \\ 0, & 0.1 \leq t \leq 0.3 \\ V_m \cos(5\pi t)\ , & 0.3 \leq t \leq 0.4 \end{cases}$$

- Eğer periyod, $t = -0.1'den \quad t = 0.3$ olarak seçilirse, Fourier seri hesaplanmasına daha az sayıda integral alırız ve bu durumda aşağıdaki fonksiyon ile işlem yaparız.

$$f(t) = \begin{cases} V_m \cos(5\pi t) & , -0.1 \leq t \leq 0.1 \\ 0 & , \quad 0.1 \leq t \leq 0.3 \end{cases}$$

- Dalga şeklinden de anlaşılacağı gibi, $f(t)$ bir çift fonksiyondur ve $B(k) = 0$

$$f(t) = A(0) + \sum_{k=1}^{\infty} A(k)\cos(k\frac{2\pi}{T}t)$$

$$A(0) = \frac{2}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)dt = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} f(t)dt$$

$$= \frac{1}{0.4}\int_{-0.1}^{0.1} [V_m \cos(5\pi t)\, dt] + 0 = \frac{V_m}{0.4}\int_{-0.1}^{0.1} \cos(5\pi t)\, dt$$

$$= \frac{V_m}{0.4}\left[\frac{1}{5\pi}\sin(5\pi t)\,\Big|_{-0.1}^{0.1}\right]$$

$$= \frac{V_m}{2\pi}[\sin(0.5\pi) - \sin(-0.5\pi)]$$

$$= \frac{V_m}{2\pi}\big(1-(-1)\big) = \frac{V_m}{\pi}$$

$$A(k) = \frac{4}{T}\int_{0}^{T/2} f(t)\cos\left(k\frac{2\pi}{T}t\right)dt$$

$$= \frac{2}{T}\int_{0}^{T} f(t)\cos\left(k\frac{2\pi}{T}t\right)dt$$

$$= \frac{2}{0.4} \int_{-0.1}^{0.1} V_m \cos(5\pi t)\cos(5\pi k t)dt$$

$$w = \frac{2\pi}{T} = 5\pi, \quad cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$$

$$k = 1 \qquad A(1) = 5V_m \int_{-0.1}^{0.1} cos^2(5\pi t)\, dt$$

$$= 5V_m \int_{-0.1}^{0.1} [\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(10\pi t)]\, dt$$

$$= 5V_m \left[\frac{1}{2} t \,\Big|_{-0.1}^{0.1} + \frac{1}{2} * \frac{1}{10\pi} \sin(10\pi t) \,\Big|_{-0.1}^{0.1}\right]$$

$$= 5V_m \left[\frac{1}{2}\big(0.1 - (-0.1)\big) + \frac{1}{20\pi}(sin\pi - \sin(-\pi))\right]$$

$$= 5V_m * 0.1 = \frac{V_m}{2}$$

$$k = 2 \quad \Longrightarrow \quad A(2) = \frac{2V_m}{3\pi}$$

$$k = 3 \quad \Longrightarrow \quad A(3) = 0$$

$$k = 4 \implies A(4) = \frac{-2V_m}{15\pi}$$

Daha önce çift fonksiyon için $B(k) = 0$ olduğunu söylemiştik. Şimdi bunu gösterelim.

$$B(k) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\left(k\frac{2\pi}{T}t\right)dt$$

$$= \frac{2}{0.4}\int V_m\cos(5\pi t)\sin(5\pi t)\,dt$$

$k = 1$ $\quad B(1) = 5V_m\int_{-0.1}^{0.1}\cos(5\pi t)\sin(5\pi kt)\,dt =$

$5V_m * \frac{1}{2}\int_{-0.1}^{0.1}\sin(10\pi t)\,dt$

$$cosxsinx = \frac{1}{2}\sin 2x$$

$$= \frac{5}{2}V_m\left[\frac{-1}{10\pi}\cos(10\pi t)\,\Big|_{-0.1}^{0.1}\right]$$

$$= \frac{-5V_m}{20\pi}[\cos(\pi) - \cos(-\pi)]$$

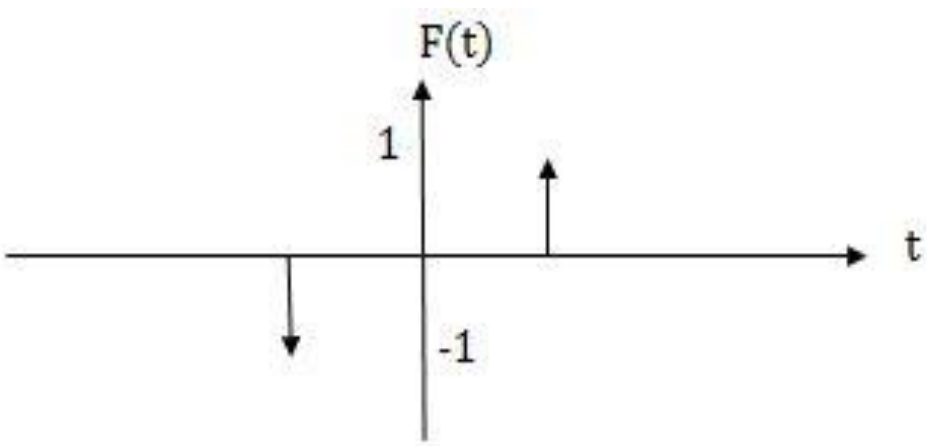
$$= \frac{-5V_m}{20\pi}\big(1-(+1)\big) = 0$$

$\Longrightarrow \quad f(t) = A(0) + \sum_{k=1}^{\infty} A(k)\cos\left(k\frac{2\pi}{T}t\right)$

$= \frac{V_m}{\pi} + \frac{V_m}{2}\cos(5\pi t) + \frac{2V_m}{3\pi}\cos(10\pi t) - \frac{2V_m}{15\pi}\cos(20\pi t) \ldots$

Örnek: Aşağıdaki grafikte periyodik bir fonksiyonun bir periyodu verilmiştir (T=4).

Fonksiyonun Fourier seri açılımını bulunuz.



Çözüm: Bu fonksiyon tek fonksiyondur.

$\Longrightarrow \quad A(0) = 0 \quad , \quad A(k) = 0$

$$B(k) = \frac{4}{T}\int_{0}^{T/2} f(t)\sin(k\frac{2\pi}{T}t)dt$$

$f(t) = -\delta(t+1) + \delta(t-1)$ $\Longrightarrow$ Bir periyod için

$f(t) = \delta(t-1)$ $\Longrightarrow$ Yarım periyod için

$$B(k) = \frac{4}{T}\int_0^2 \delta(t-1)\sin(k\frac{2\pi}{T}t)\,dt = \sin(k\frac{\pi}{2})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)f(t_0)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)f(t_0)dt$$

$$= f(t_0)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)dt = f(t_0).1$$

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} B(k)\sin\left(k\frac{2\pi}{T}t\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(k\frac{\pi}{2}t\right)\sin\left(k\frac{\pi}{2}t\right)$$

k=1,2,3...

Karmaşık Fourier Seri Açılımı

Periyodik bir fonksiyonun açılımını tekrar yazalım

$$f(t) = A(0)$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty} A(k)\cos\left(k\frac{2\pi}{T}t\right) + \sum_{k=1}^{\infty} B(k)\sin\left(k\frac{2\pi}{T}t\right)$$

Buradaki katsayılar gerçel sayılardır ve bunları tek bir katsayı altında birleştirebiliriz.

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(k)e^{jk\frac{2\pi}{T}t}\,dt$$

$$F(k) = \frac{1}{T}\int_{T} f(t)\,e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}dt$$

Fourier seri karmaşık katsayıları

Daha sade bir şekilde yazarsak

$$w_0 = \frac{2\pi}{T} \quad ---->\quad f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(k)e^{jkw_0t}\,dt$$

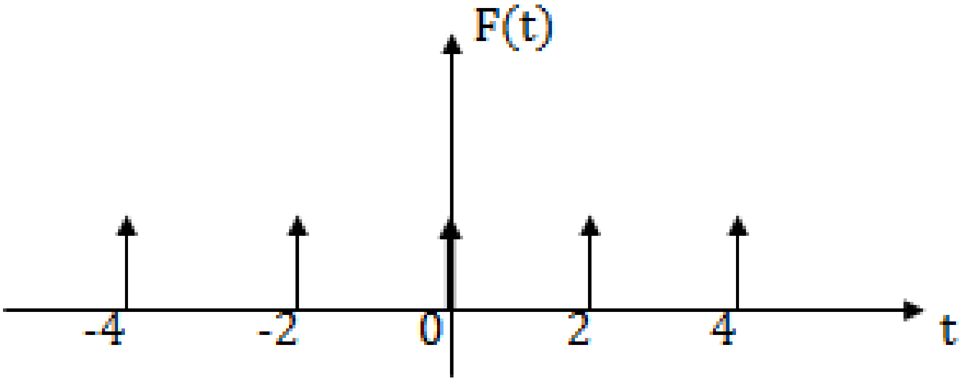
$$F(k) = \frac{1}{T}\int_{T} f(t)\,e^{-jkw_0t}dt$$

Gerçel katsayılar A(k) ve B(k) ile F(k) arasındaki ilişki aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$F(0) = A(0)$$

$$F(k) = \frac{1}{2}[A(k) - jB(k)] \qquad k \neq 0$$

Örnek: Aşağıdaki fonksiyonun karmaşık Fourier seri açılımını yazınız.



Çözüm: Bu fonksiyonun periyodu, T=2 dir. Bu fonksiyonu matematiksel olarak

$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-2k)$ şeklinde yazabiliriz.

$$F(k) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jkw_0 t}dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \delta(t)e^{-jkw_0 t}dt$$

$$> Daha\ basit\ olsun\ diye$$
$$-1\ \&\ 1\ aralığı\ kullanıldı$$

$\int \delta(t)f(t)dt = f(0)$ özelliğini kullanarak:

$$F(k) = \frac{1}{2}e^{0} = \frac{1}{2}$$

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(k)e^{jkw_0t}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\frac{2\pi}{2}t} = \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\pi t}$$

Örnek: $f(t) = \sin(\frac{2\pi}{T}t)$ fonksiyonunun karmaşık Fourier seri katsayılarını bulunuz.

Çözüm:

$$sinx = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} \qquad \text{özelliğini kullanarak}$$

$$f(t) = \frac{e^{j\frac{2\pi}{T}t} - e^{-j\frac{2\pi}{T}t}}{2j} \qquad ---\rightarrow (1)$$

Periyodu T olan f(t) fonksiyonunun karmaşık Fourier seri açılımı şöyledir.

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(k)e^{jk\frac{2\pi}{T}t}$$

$$= \cdots F(-1)e^{-j\frac{2\pi}{T}t} + F(0) + f(1)e^{j\frac{2\pi}{T}t} \ldots \; ---> \; (2)$$

Denklem (1) ve (2) ‘yi eşitleyelim

$$\frac{e^{j\frac{2\pi}{T}t}}{2j} - \frac{e^{-j\frac{2\pi}{T}t}}{2j} = F(-1)e^{-j\frac{2\pi}{T}t} + F(0) + F(1)e^{j\frac{2\pi}{T}t}$$

Buradan görüleceği gibi

$$F(0) = 0 \qquad F(-1) = -\frac{1}{2j} \qquad F(1) = \frac{1}{2j}$$

$$F(k) = 0 \qquad k = \pm 2\,, \pm 3\,, \ldots$$